

## 海淀区高三年期考试

### 数学 (文科)

2017. 11

本试卷共 4 页, 150 分。考试时长 120 分钟。考生务必将答案在答题纸上, 在试卷上作答无效。考试结束后, 将答题纸交回。

#### 第一部分 (选择题 共 40 分)

一、选择题共 8 小题, 每小题 5 分, 共 40 分。在每小题列出的四个选项中, 选出符合题目要求的一项。

(1) 若集合  $A = \{x | x - 2 < 0\}$ , 集合  $B = \{x | 2^x > 1\}$ , 则  $A \cap B =$

- (A)  $\mathbf{R}$                       (B)  $(-\infty, 2)$                       (C)  $(0, 2)$                       (D)  $(2, +\infty)$

(2) 命题 “ $\forall x \geq 0, \sin x \leq 1$ ” 的否定是

- (A)  $\forall x < 0, \sin x > 1$                       (B)  $\forall x \geq 0, \sin x > 1$   
(C)  $\exists x < 0, \sin x > 1$                       (D)  $\exists x \geq 0, \sin x > 1$

(3) 下列函数中, 既是偶函数又在  $(0, +\infty)$  上单调递增的是

- (A)  $f(x) = -x^2$                       (B)  $f(x) = 3^{-x}$                       (C)  $f(x) = \ln|x|$                       (D)  $f(x) = x + \sin x$

(4) 已知数列  $\{a_n\}$  满足  $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n = 2a_2 (n = 1, 2, 3, \dots)$ , 则

- (A)  $a_1 < 0$                       (B)  $a_1 > 0$                       (C)  $a_1 \neq a_2$                       (D)  $a_2 = 0$

(5) 在平面直角坐标系  $xOy$  中, 点  $A$  的纵坐标为 2, 点  $C$  在  $x$  轴的正半轴上。

在  $\triangle AOC$  中, 若  $\cos \angle AOC = -\frac{\sqrt{5}}{3}$ , 则点  $A$  的横坐标为

- (A)  $-\sqrt{5}$                       (B)  $\sqrt{5}$                       (C)  $-3$                       (D)  $3$

(6) 已知向量  $a, b$  是两个单位向量, 则 “ $a = b$ ” 是



高考资讯站  
微信公众号

你身边的高考专家

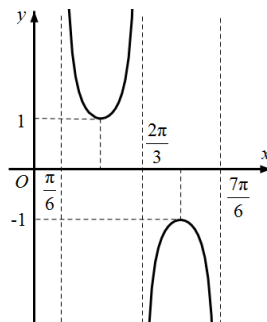
政策解读 | 志愿指导  
学习方法 | 家庭教育  
院校介绍 | 专业分析

“ $|a + b| = 2$ ”的

- (A) 充分不必要条件      (B) 必要不充分条件  
(C) 充分必要条件      (D) 既不充分也不必要条件

(7) 已知函数  $f(x) = \frac{1}{\sin(\omega x + \varphi)}$  ( $\omega > 0, |\varphi| < \frac{\pi}{2}$ ) 的部分图象如图所示, 则  $\omega, \varphi$  的值分别为

- (A)  $2, \frac{\pi}{3}$       (B)  $2, -\frac{\pi}{3}$       (C)  $1, \frac{\pi}{6}$       (D)  $1, -\frac{\pi}{6}$



(8) 若函数  $f(x) = \begin{cases} xe^x, & x \leq 0 \\ ax^2 - 2x, & x > 0 \end{cases}$  的值域为  $[-\frac{1}{e}, +\infty)$ , 则实数  $a$

的取值范围是

- (A)  $(0, e)$       (B)  $(e, +\infty)$       (C)  $(0, e]$       (D)  $[e, +\infty)$

## 第二部分 (非选择题 共 110 分)

二、填空题共 6 小题, 每小题 5 分, 共 30 分。

(9) 已知等差数列  $\{a_n\}$  满足  $a_1 = 2, a_2 + a_4 = a_6$ , 则公差  $d =$ \_\_\_\_\_.

(10) 已知向量  $\mathbf{a} = (1, 0)$ ,  $\mathbf{b} = (m, n)$ , 若  $\mathbf{b} - \mathbf{a}$  与  $\mathbf{a}$  平行, 则  $n$  的值为\_\_\_\_\_.

(11) 已知函数  $f(x)$  是定义在  $\mathbf{R}$  上的周期为 2 的奇函数, 当  $0 < x < 1$  时,  $f(x) = \frac{1}{x}$ ,

则  $f(-\frac{5}{2}) + f(0) =$ \_\_\_\_\_.

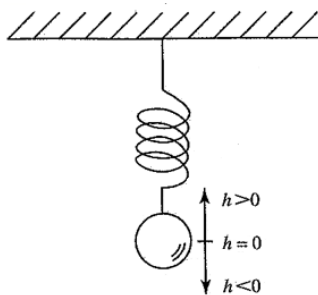
(12) 如图, 弹簧挂着一个小球作上下运动, 小球在  $t$  秒时相对于平衡位置的高度  $h$  (厘米) 由如下关系式确定:  $h = \sqrt{2} \sin t + \sqrt{2} \cos t, t \in [0, +\infty)$ , 则小球在开始振动 (即  $t = 0$ ) 时  $h$  的值为\_\_\_\_\_, 小球振动过程中最大的高度差为\_\_\_\_\_厘米.



高考  
资讯  
站  
微  
信  
公  
众  
号

你身边的高考专家

政策解读 | 志愿指导  
学习方法 | 家庭教育  
院校介绍 | 专业分析



(13) 能够说明 “设  $x$  是实数. 若  $x > 1$ , 则  $x + \frac{1}{x-1} > 3$ ” 是假命题的一个实数  $x$  的值为\_\_\_\_\_.

(14) 已知非空集合  $A, B$  满足以下两个条件:

(i)  $A \cup B = \{1, 2, 3, 4\}, A \cap B = \emptyset$ ;

(ii) 集合  $A$  的元素个数不是  $A$  中的元素, 集合  $B$  的元素个数不是  $B$  中的元素.

那么用列举法表示集合  $A$  为\_\_\_\_\_.

三、解答题共 6 小题, 共 80 分. 解答应写出文字说明、演算步骤或证明过程.

(15) (本小题 13 分)

已知函数  $f(x) = 2 \sin x \cos x + 2 \cos^2 x - 1$ .

(I) 求  $f(\frac{\pi}{4})$  的值;

(II) 求函数  $f(x)$  的单调递增区间.

(16) (本小题 13 分)

已知等比数列  $\{a_n\}$  满足  $a_1 a_2 a_3 = 8$ ,  $a_5 = 16$ .

(I) 求  $\{a_n\}$  的通项公式及前  $n$  项和  $S_n$ ;

(II) 设  $b_n = \log_2 a_{n+1}$ , 求数列  $\left\{ \frac{1}{b_n b_{n+1}} \right\}$  的前  $n$  项和  $T_n$ .

(17) (本小题 13 分)

如图,  $\triangle ABD$  为正三角形,  $AC \parallel DB$ ,  $AC = 4$ ,  $\cos \angle ABC = \frac{\sqrt{21}}{7}$ .



高考资讯站  
微信公众号

你身边的高考专家

政策解读 | 志愿指导

学习方法 | 家庭教育

院校介绍 | 专业分析

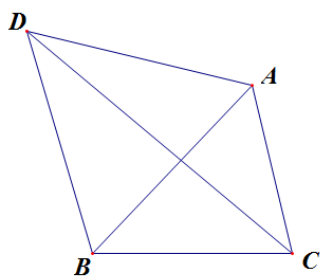
(I) 求  $\sin \angle ACB$  的值;

(II) 求  $AB$ ,  $CD$  的长.

(18) (本小题 13 分)

已知函数  $f(x) = x^3 - x$ ,  $g(x) =$

(I) 求曲线  $y = f(x)$  在点  $(1, f(1))$  处



(II) 求函数  $f(x)$  在  $[0, 2]$  上的最大值;

(III) 求证: 存在唯一的  $x_0$ , 使得  $f(x_0) = g(x_0)$ .

(19) (本小题 14 分)

已知数列  $\{a_n\}$  满足  $a_1 = a_2 = 1$ ,  $a_{n+2} = a_n + 2(-1)^n$ , ( $n \in \mathbb{N}^*$ ).

(I) 写出  $a_5, a_6$  的值;

(II) 设  $b_n = a_{2n}$ , 求  $\{b_n\}$  的通项公式;

(III) 记数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和为  $S_n$ , 求数列  $\{S_{2n} - 18\}$  的前  $n$  项和  $T_n$  的最小值.

(20) (本小题 14 分)

已知函数  $f(x) = (x^2 - x) \ln x$ .

(I) 求证: 1 是函数  $f(x)$  的极值点;

(II) 设  $g(x)$  是函数  $f(x)$  的导函数, 求证:  $g(x) > -1$ .



高考资讯站  
微信公众号

你身边的高考专家

政策解读 | 志愿指导

学习方法 | 家庭教育

院校介绍 | 专业分析

## 海淀区高三年级第一学期期中练习参考答 2017.11

### 数 学 (文科)

#### 阅卷须知:

1. 评分参考中所注分数, 表示考生正确做到此步应得的累加分数.
2. 其它正确解法可以参照评分标准按相应步骤给分.

#### 一、选择题: 本大题共 8 小题, 每小题 5 分, 共 40 分.

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
选项	C	D	C	D	A	C	B	D

#### 二、填空题: 本大题共 6 小题, 每小题 5 分, 共 30 分. (有两空的小题第一空 3 分)

9. 2                                    10. 0                                    11. - 2
12.  $\sqrt{2}$ ; 4                                13. 2                                    14.  $\{3\}$  或  $\{1,2,4\}$  (答对一个给 3 分)

#### 三、解答题: 本大题共 6 小题, 共 80 分.

15. (本题 13 分)

解: (I)  $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2 \sin \frac{\pi}{4} \cos \frac{\pi}{4} + 2\left(\cos \frac{\pi}{4}\right)^2 - 1$  .....1 分

$= 2 \times \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} + 2 \times \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 - 1$  .....3 分 (  $\sin \frac{\pi}{4}, \cos \frac{\pi}{4}$  值各 1 分)

$= 1$  .....4 分

(II)  $f(x) = \sin 2x + \cos 2x$  .....8 分 (一个公式 2 分)

$= \sqrt{2} \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$ . .....10 分

令  $-\frac{\pi}{2} + 2k\pi \leq 2x + \frac{\pi}{4} \leq \frac{\pi}{2} + 2k\pi$  .....12 分

得  $-\frac{3\pi}{8} + k\pi \leq x \leq \frac{\pi}{8} + k\pi, k \in \mathbf{Z}$

所以函数  $f(x)$  的单调递增区间为  $\left[-\frac{3\pi}{8} + k\pi, \frac{\pi}{8} + k\pi\right], k \in \mathbf{Z}$ . ...13 分



微  
信  
公  
众  
号  
高  
考  
资  
讯  
站

你身边的高考专家

政策解读 | 志愿指导  
学习方法 | 家庭教育  
院校介绍 | 专业分析

说明: ①如果没有代入  $\frac{\pi}{4}$  的过程或没有  $\sin \frac{\pi}{4}$  和  $\cos \frac{\pi}{4}$  的函数值, 但最后结果正确扣 1 分; 如果第 (I) 问先化简的, 按照第 (II) 问相应的评分标准给分。

② (II) 问中解析式化简可以写成  $\sqrt{2} \cos(2x - \frac{\pi}{4})$ , 参照上面步骤给分。

③求单调区间时,  $-\frac{3\pi}{8} + k\pi \leq x \leq \frac{\pi}{8} + k\pi, k \in \mathbf{Z}$  正确, 但没有写成区间形式、无  $k \in \mathbf{Z}$ , 只要居其一扣一分, 不累扣。

16. (本题 13 分)

解: (I) 设等比数列  $\{a_n\}$  的公比为  $q$ 。

因为  $a_1 a_2 a_3 = 8$ , 且  $a_1 a_3 = a_2^2$

所以  $a_2^3 = 8$ , 得  $a_2 = 2$ , .....2 分

又因为  $a_5 = a_2 q^3 = 16$ , 所以  $q^3 = 8$ , 得  $q = 2$ ,  $a_1 = 1$ . .....4 分

所以  $a_n = 2^{n-1} (n \in \mathbf{N}_+)$ , .....5 分

所以  $S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q}$  .....6 分

$$= \frac{1-2^n}{1-2} = 2^n - 1 \quad \dots 7 \text{ 分}$$

(II) 因为  $a_{n+1} = 2^n$ , 所以  $b_n = \log_2 a_{n+1} = n$ , .....9 分

所以  $\frac{1}{b_n b_{n+1}} = \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$ . .....11 分

所以数列  $\left\{ \frac{1}{b_n b_{n+1}} \right\}$  的前  $n$  项和

$$T_n = \left( 1 - \frac{1}{2} \right) + \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \dots + \left( \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) \quad \dots 12 \text{ 分}$$



高考资讯站  
微信公众号

你身边的高考专家

政策解读 | 志愿指导

学习方法 | 家庭教育

院校介绍 | 专业分析

$$= 1 - \frac{1}{n+1}$$

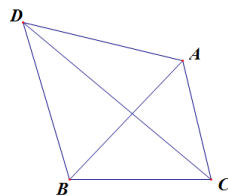
$$= \frac{n}{n+1}$$

...13分

17. (本题 13 分)

解: (I) 因为  $\triangle ABD$  为正三角形,  $AC \parallel DB$ , 所以在  $\triangle ABC$  中,

$$\angle BAC = \frac{\pi}{3}, \text{ 所以 } \angle ACB = \pi - \left(\frac{\pi}{3} + \angle ABC\right).$$



$$\text{所以 } \sin \angle ACB = \sin\left(\frac{\pi}{3} + \angle ABC\right)$$

.....1分

$$= \sin \frac{\pi}{3} \cos \angle ABC + \cos \frac{\pi}{3} \sin \angle ABC \quad \text{.....3分 (一个公式 2分)}$$

$$\text{因为在 } \triangle ABC \text{ 中, } \cos \angle ABC = \frac{\sqrt{21}}{7}, \angle ABC \in (0, \pi)$$

.....4分

$$\text{所以 } \sin \angle ABC = \frac{2\sqrt{7}}{7}$$

.....5分

$$\text{所以 } \sin \angle ACB = \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{21}}{7} + \frac{1}{2} \times \frac{2\sqrt{7}}{7} = \frac{5\sqrt{7}}{14}$$

...6分

(II) 方法 1:

$$\text{在 } \triangle ABC \text{ 中, } AC = 4, \text{ 由正弦定理得: } \frac{AB}{\sin \angle ACB} = \frac{AC}{\sin \angle ABC}, \quad \text{.....8分}$$

$$\text{所以 } AB = \frac{AC \cdot \sin \angle ACB}{\sin \angle ABC} = \frac{4 \times \frac{5\sqrt{7}}{14}}{\frac{2\sqrt{7}}{7}} = 5$$

...9分

$$\text{又在正 } \triangle ABD \text{ 中, } AB = AD, \angle DAB = \frac{\pi}{3},$$

$$\text{所以在 } \triangle ADC \text{ 中, } \angle DAC = \frac{2\pi}{3},$$

...10分



高考资讯站  
微信公众号

你身边的高考专家

政策解读 | 志愿指导

学习方法 | 家庭教育

院校介绍 | 专业分析

由余弦定理得:

$$CD^2 = AC^2 + AD^2 - 2AC \cdot AD \cos \angle DAC \quad \dots\dots 12 \text{ 分}$$

$$= 16 + 25 - 2 \times 4 \times 5 \cos \frac{2\pi}{3} = 61$$

所以  $CD$  的长为  $\sqrt{61}$ . \dots\dots 13 \text{ 分}

方法 2: 在  $\triangle ABC$  中, 由正弦定理得:

$$\frac{AB}{\sin \angle ACB} = \frac{AC}{\sin \angle ABC} = \frac{BC}{\sin \angle BAC}, \quad \dots\dots 8 \text{ 分}$$

所以  $AB = \frac{AC \sin \angle ACB}{\sin \angle ABC} = \frac{4 \times \frac{5\sqrt{7}}{14}}{\frac{2\sqrt{7}}{7}} = 5,$  \dots\dots 9 \text{ 分}

$$BC = \frac{AC \sin \angle BAC}{\sin \angle ABC} = \frac{4 \times \frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{2\sqrt{7}}{7}} = \sqrt{21} \quad \dots\dots 10 \text{ 分}$$

所以  $\cos \angle DBC = \cos(\angle DBA + \angle ABC)$

$$= \cos \angle DBA \cos \angle ABC - \sin \angle DBA \sin \angle ABC$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{21}}{7} - \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{2\sqrt{7}}{7}$$

$$= -\frac{\sqrt{21}}{14}. \quad \dots\dots 11 \text{ 分}$$

在  $\triangle DBC$  中, 由余弦定理得

$$CD^2 = DB^2 + BC^2 - 2DB \times BC \times \cos \angle DBC \quad \dots\dots 12 \text{ 分}$$

$$= 25 + 21 - 2 \times 5 \times \sqrt{21} \times \left(-\frac{\sqrt{21}}{14}\right)$$

$$= 61.$$

所以  $CD$  的长为  $\sqrt{61}$ . \dots\dots 13 \text{ 分}



高  
考  
资  
讯  
站  
微  
信  
公  
众  
号

**你身边的高考专家**

政策解读 | 志愿指导

学习方法 | 家庭教育

院校介绍 | 专业分析



18. (本题 13 分)

解: (I) 由  $f(x) = x^3 - x$ , 得  $f'(x) = 3x^2 - 1$ , .....1 分

所以  $f'(1) = 2$ , 又  $f(1) = 0$  .....3 分

所以曲线  $y = f(x)$  在点  $(1, f(1))$  处的切线方程为:  $y - 0 = 2(x - 1)$ ,

即:  $2x - y - 2 = 0$ . .....4 分

(II) 令  $f'(x) = 0$ , 得  $x = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}$  .....5 分

$f(x)$  与  $f'(x)$  在区间  $[0, 2]$  的情况如下:

$x$	$(0, \frac{\sqrt{3}}{3})$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$(\frac{\sqrt{3}}{3}, 2)$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$\searrow$	极小值	$\nearrow$

.....7 分

因为  $f(0) = 0, f(2) = 6$ , .....8 分

所以函数  $f(x)$  在区间  $[0, 2]$  上的最大值为 6. .....9 分

(III) 证明: 设  $h(x) = f(x) - g(x) = x^3 - 3x + 3$ ,

则  $h'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x - 1)(x + 1)$ , .....10 分

令  $h'(x) = 0$ , 得  $x = \pm 1$ .

$h(x)$  与  $h'(x)$  随  $x$  的变化情况如下:

$x$	$(-\infty, -1)$	-1	$(-1, 1)$	1	$(1, +\infty)$
$h'(x)$	+	0	-	0	+
$h(x)$	$\nearrow$	极大值	$\searrow$	极小值	$\nearrow$

则  $h(x)$  的增区间为  $(-\infty, -1), (1, +\infty)$ , 减区间为  $(-1, 1)$ . .....11 分



高考资讯站  
微信公众号

你身边的高考专家

政策解读 | 志愿指导

学习方法 | 家庭教育

院校介绍 | 专业分析

又  $h(1) = 1 > 0$ ,  $h(-1) > h(1) > 0$ , 所以函数  $h(x)$  在  $(-1, +\infty)$  没有零点, .....12 分

又  $h(-3) = -15 < 0$ ,

所以函数  $h(x)$  在  $(-\infty, -1)$  上有唯一零点  $x_0$ . .....13 分

综上, 在  $(-\infty, +\infty)$  上存在唯一的  $x_0$ , 使得  $f(x_0) = g(x_0)$ .

19. (本题 14 分)

解: (I)  $a_3 = -1, a_4 = 3$

$$a_5 = -3, a_6 = 5; \quad \text{.....2 分}$$

(II) 设  $b_n = a_{2n}, n \in \mathbf{N}^*$

$$\text{则 } b_{n+1} - b_n = a_{2n+2} - a_{2n} = 2(-1)^{2n} = 2, \quad \text{.....4 分}$$

所以  $\{b_n\}$  是以 1 为首项, 2 为公差的等差数列, .....5 分

$$\text{所以 } b_n = 1 + (n-1) \cdot 2 = 2n - 1. \quad \text{.....6 分}$$

(III) 解法 1:  $a_{2n+1} - a_{2n-1} = 2(-1)^{2n-1} = -2, n \in \mathbf{N}^*$ ,

所以  $\{a_{2n-1}\}$  是以 1 为首项, -2 为公差  $d$  的等差数列, .....7 分

$$\text{所以数列 } \{a_n\} \text{ 的前 } n \text{ 奇数项之和为 } na_1 + \frac{n(n-1)}{2}d = 2n - n^2 \quad \text{.....8 分}$$

由 (II) 可知,  $a_{2n} = 2n - 1$ ,

$$\text{所以数列 } \{a_n\} \text{ 的前 } n \text{ 个偶数项之和为 } \frac{(a_2 + a_{2n})n}{2} = n^2 \quad \text{.....10 分}$$

$$\text{所以 } S_{2n} = 2n, \quad \text{.....11 分}$$

$$\text{所以 } S_{2n} - 18 = 2n - 18.$$

$$\text{因为 } S_{2n} - 18 - (S_{2n-2} - 18) = 2, \text{ 且 } S_2 - 18 = -16$$



高考资讯站  
微信公众号

你身边的高考专家

政策解读 | 志愿指导  
学习方法 | 家庭教育  
院校介绍 | 专业分析

所以数列  $\{S_{2n} - 18\}$  是以  $-16$  为首项,  $2$  为公差的等差数列.  $\cdots\cdots 12$  分

由  $S_{2n} - 18 = 2n - 18 \leq 0$  可得  $n \leq 9$ ,  $\cdots\cdots 13$  分

所以当  $n = 8$  或  $n = 9$  时, 数列  $\{S_{2n} - 18\}$  的前  $n$  项和  $T_n$  的最小值为

$$T_8 = T_9 = \frac{-16 \times 9}{2} = -72. \quad \cdots\cdots 14$$
 分

解法二: 由  $a_{n+2} = a_n + 2(-1)^n (n \in \mathbf{N}^*)$  得

$$a_{2n} = a_{2n-2} + 2(-1)^{2n-2} (n \in \mathbf{N}^*, n \geq 2) \textcircled{1}, \quad \cdots\cdots 7$$
 分

$$a_{2n-1} = a_{2n-3} + 2(-1)^{2n-3} (n \in \mathbf{N}^*, n \geq 2) \textcircled{2}, \quad \cdots\cdots 8$$
 分

把①②两个等式相加可得,  $a_{2n-1} + a_{2n} = a_{2n-3} + a_{2n-2} (n \in \mathbf{N}^*, n \geq 2)$ ,

所以  $a_{2n-1} + a_{2n} = a_{2n-3} + a_{2n-2} = \cdots = a_1 + a_2 = 2$ .  $\cdots\cdots 10$  分

所以数列  $\{a_n\}$  的前  $2n$  项和  $S_{2n} = 2n$ ,  $\cdots\cdots 11$  分

(或: 由  $a_{n+2} = a_n + 2(-1)^n (n \in \mathbf{N}^*)$  得

$$S_{2n} = 1 + 1 + (-1) + 3 + (-3) + 5 + \cdots + (-2n + 3) + (2n - 1) \quad \cdots\cdots 7$$
 分

$$= (1 + 1) + [(-1) + 3] + [(-3) + 5] + \cdots + [(-2n + 3) + (2n - 1)] \quad \cdots\cdots 10$$
 分

$$= 2n \quad \cdots\cdots 11$$
 分)

所以  $S_{2n} - 18 = 2n - 18$ .

因为  $S_{2n} - 18 - (S_{2n-2} - 18) = 2$ , 且  $S_2 - 18 = -16$

所以数列  $\{S_{2n} - 18\}$  是以  $-16$  为首项,  $2$  为公差的等差数列.  $\cdots\cdots 12$  分

由  $S_{2n} - 18 = 2n - 18 \leq 0$  可得  $n \leq 9$ ,  $\cdots\cdots 13$  分

所以当  $n = 8$  或  $n = 9$  时, 数列  $\{S_{2n} - 18\}$  的前  $n$  项和  $T_n$  的最小值为

$$T_8 = T_9 = \frac{-16 \times 9}{2} = -72 \quad \cdots\cdots 14$$
 分



高考资讯站  
微信公众号

你身边的高考专家

政策解读 | 志愿指导

学习方法 | 家庭教育

院校介绍 | 专业分析

20. (本题 14 分)

(I) 证明:

证法 1:  $f(x) = (x^2 - x) \ln x$  的定义域为  $(0, +\infty)$  .....1 分

由  $f(x) = (x^2 - x) \ln x$  得

$$f'(x) = (2x - 1) \ln x + (x^2 - x) \frac{1}{x} = (2x - 1) \ln x + x - 1, \quad \dots\dots 2 \text{ 分}$$

$\therefore f'(1) = 0$ . .....3 分

当  $x > 1$  时,  $(2x - 1) \ln x > 0, x - 1 > 0, \therefore f'(x) > 0$ , 故  $f(x)$  在  $(1, +\infty)$  上单调递增;

.....4 分

当  $\frac{1}{2} < x < 1$  时,  $(2x - 1) \ln x < 0, x - 1 < 0, \therefore f'(x) < 0$ , 故  $f(x)$  在  $(\frac{1}{2}, 1)$  上单调递减;

.....5 分

(此处为推理说明)

所以 1 是函数  $f(x)$  的极值点.

.....6 分

证法 2: (根据极值的定义直接证明)

$f(x) = (x^2 - x) \ln x$  的定义域为  $(0, +\infty)$  .....1 分

$\because f(x) = x(x - 1) \ln x, \therefore f(1) = 0$  .....3 分

当  $x > 1$  时,  $x(x - 1) > 0, \ln x > 0, \therefore f(x) > 0$ , 即  $f(x) > f(1)$ ; .....4 分

当  $0 < x < 1$  时,  $x(x - 1) < 0, \ln x < 0, \therefore f(x) > 0$ , 即  $f(x) > f(1)$ ; .....5 分

根据极值的定义, 1 是  $f(x)$  的极值点. .....6 分

(II) 由题意可知,  $g(x) = (2x - 1) \ln x + x - 1$

证法 1:  $g'(x) = 2 \ln x - \frac{1}{x} + 3, x \in (0, +\infty)$ ,

令  $h(x) = 2 \ln x - \frac{1}{x} + 3, x \in (0, +\infty)$ ,

$\therefore h'(x) = \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2} = \frac{2x + 1}{x^2} > 0$ , 故  $h(x)$  在  $(0, +\infty)$  上单调递增. .....7 分

又  $h(1) = 2 > 0, h(\frac{1}{2}) = 1 - \ln 4 = \ln \frac{e}{4} < 0$ , 又  $h(x)$  在  $(0, +\infty)$  上连续,



高考资讯站  
微信公众号

你身边的高考专家

政策解读 | 志愿指导

学习方法 | 家庭教育

院校介绍 | 专业分析

$\therefore \exists x_0 \in (\frac{1}{2}, 1)$  使得  $h(x_0) = 0$ , 即  $g'(x_0) = 0$ , .....8分

$\therefore 2 \ln x_0 - \frac{1}{x_0} + 3 = 0$ . (\*) .....9分

$g'(x), g(x)$  随  $x$  的变化情况如下:

$x$	$(0, x_0)$	$x_0$	$(x_0, +\infty)$
$g'(x)$	-	0	+
$g(x)$	↘	极小值	↗

.....10分

$\therefore g(x)_{\min} = g(x_0) = (2x_0 - 1)\ln x_0 + x_0 - 1$ . .....11分

由 (\*) 式得  $\ln x_0 = \frac{1}{2x_0} - \frac{3}{2}$ , 代入上式得

$g(x)_{\min} = g(x_0) = (2x_0 - 1)(\frac{1}{2x_0} - \frac{3}{2}) + x_0 - 1 = -2x_0 - \frac{1}{2x_0} + \frac{3}{2}$ . .....12分

令  $t(x) = -2x - \frac{1}{2x} + \frac{3}{2}, x \in (\frac{1}{2}, 1)$ ,

$t'(x) = \frac{1}{2x^2} - 2 = \frac{(1+2x)(1-2x)}{2x^2} < 0$ , 故  $t(x)$  在  $(\frac{1}{2}, 1)$  上单调递减. ....3分

$\therefore t(x) > t(1)$ , 又  $t(1) = -1$ ,  $\therefore t(x) > -1$ .

即  $g(x_0) > -1 \quad \therefore g(x) > -1$ . .....14分

**证法 2:**  $g(x) = (2x - 1)\ln x + x - 1 = 2x \ln x - \ln x + x - 1, x \in (0, +\infty)$ ,

令  $h(x) = 2x \ln x, t(x) = -\ln x + x - 1, x \in (0, +\infty)$ , .....7分

$h'(x) = 2(\ln x + 1)$ , 令  $h'(x) = 0$  得  $x = \frac{1}{e}$ . ....8分

$h'(x), h(x)$  随  $x$  的变化情况如下:

$x$	$(0, \frac{1}{e})$	$\frac{1}{e}$	$(\frac{1}{e}, +\infty)$
$h'(x)$	-	0	+
$h(x)$	↘	极小值	↗



高考资讯站  
微信公众号

你身边的高考专家

政策解读 | 志愿指导  
学习方法 | 家庭教育  
院校介绍 | 专业分析

$\therefore h(x)_{\min} = h\left(\frac{1}{e}\right) = -\frac{2}{e}$ , 即  $2x \ln x \geq -\frac{2}{e}$ , 当且仅当  $x = \frac{1}{e}$  时取到等号. ……10分

$t'(x) = \frac{x-1}{x}$ , 令  $t'(x) = 0$  得  $x = 1$ . ……11分

$t'(x), t(x)$  随  $x$  的变化情况如下:

$x$	$(0, 1)$	1	$(1, +\infty)$
$t'(x)$	-	0	+
$t(x)$	$\searrow$	极小值	$\nearrow$

……12分

$\therefore t(x)_{\min} = t(1) = 0$ , 即  $x - 1 - \ln x \geq 0$ , 当且仅当  $x = 1$  时取到等号. ……13分

$\therefore 2x \ln x + (-\ln x + x - 1) > -\frac{2}{e} > -1$ .

即  $g(x) > -1$ . ……14分



高考资讯站  
微信公众号

你身边的高考专家

政策解读 | 志愿指导

学习方法 | 家庭教育

院校介绍 | 专业分析