

潮师高中 2018 届高三上学期数学 (理科) 期中考试

(本试卷共 4 页, 21 小题, 满分 150 分。考试用时 120 分钟)

注意事项: 非选择题必须用黑色字迹钢笔或签字笔作答, 答案必须写在答题卡各题目指定区域内相应位置上; 如需改动, 先划掉原来的答案, 然后再写上新的答案; 不准使用铅笔和涂改液。不按以上要求作答的答案无效。

一、选择题 (每小题 5 分, 总 50 分)

1. 已知集合 $M = \{x | x < 3\}$, $N = \{x | x^2 - 6x + 8 < 0\}$, 则 $M \cap N =$ ()
- A. \emptyset B. $\{x | 0 < x < 3\}$ C. $\{x | 1 < x < 3\}$ D. $\{x | 2 < x < 3\}$

2. 已知命题 P 是: “对任意的 $x \in \mathbf{R}$, $x^3 - x^2 + 1 \leq 0$ ”, 那么 $\neg P$ 是 ()
- A. 不存在 $x \in \mathbf{R}$, $x^3 - x^2 + 1 \leq 0$ B. 存在 $x \in \mathbf{R}$, $x^3 - x^2 + 1 \leq 0$
- C. 存在 $x \in \mathbf{R}$, $x^3 - x^2 + 1 > 0$ D. 对任意的 $x \in \mathbf{R}$, $x^3 - x^2 + 1 > 0$

3. $y = (\sin x + \cos x)^2 - 1$ 是 ()
- A. 最小正周期为 2π 的奇函数 B. 最小正周期为 2π 的偶函数
- C. 最小正周期为 π 的奇函数 D. 最小正周期为 π 的偶函数

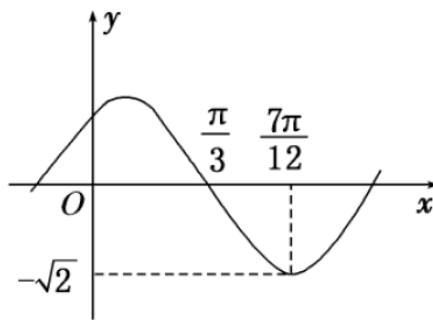
4. 设 $x, y \in \mathbf{R}$, 则 “ $x \geq 2$ 且 $y \geq 2$ ” 是 “ $x^2 + y^2 \geq 4$ ” 的 ()
- A. 充分而不必要条件 B. 必要而不充分条件
- C. 充分必要条件 D. 即不充分也不必要条件

- 5 若 $f(x) = \frac{1}{\log_{\frac{1}{2}}(2x+1)}$, 则 $f(x)$ 的定义域为 ()
- A. $(-\frac{1}{2}, 0)$ B. $(-\frac{1}{2}, +\infty)$ C. $(-\frac{1}{2}, 0) \cup (0, +\infty)$ D. $(-\frac{1}{2}, 2)$

6. 函数 $f(x) = A \sin(\omega x + \varphi)$ ($A > 0, \omega > 0, 0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$)

的部分图象如图所示, 则 $f(0)$ 的值是 ()

- A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ B. $\frac{\sqrt{3}}{4}$ C. $\frac{\sqrt{6}}{2}$ D. $\frac{\sqrt{6}}{4}$



高考资讯站
 微信公众号

你身边的高考专家
 政策解读 | 志愿指导
 学习方法 | 家庭教育
 院校介绍 | 专业分析

7. 在平面直角坐标系中, 不等式组 $\begin{cases} x+y \geq 0 \\ x-y+4 \geq 0 \\ x \leq 1 \end{cases}$ 表示的平面区域面积是 ().

- A. 3 B. 6 C. $\frac{9}{2}$ D. 9

8. 已知 $\sin(\alpha - \frac{\pi}{4}) = \frac{1}{3}$, 则 $\cos(\frac{\pi}{4} + \alpha)$ 的值等于 ().

- A. $\frac{2}{3}\sqrt{2}$ B. $-\frac{2}{3}\sqrt{2}$ C. $\frac{1}{3}$ D. $-\frac{1}{3}$

9. 已知函数 $y = a^{x-1}$ ($a > 0$, 且 $a \neq 1$) 的图象恒过定点 A, 若点 A 在函数 $y = mx + n$ 的图象上,

其中 $m, n > 0$, 则 $\frac{1}{m} + \frac{1}{n}$ 的最小值为

- A. 1 B. 4 C. $\sqrt{2}$ D. 2

10. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} |\lg x|, 0 < x \leq 10 \\ -\frac{1}{2}x + 6, x > 10 \end{cases}$, 若 a, b, c 互不相等, 且 $f(a) = f(b) = f(c)$, 则 abc

的取值范围是 ().

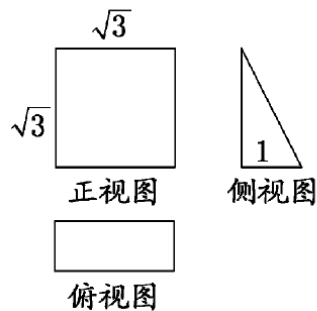
- A.(1,10) B.(5,6) C.(10,12) D.(20,24)

二、填空题 (每小题 5 分, 总 20 分, 其中 14、15 题为选做题)

11. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} 2^x, (x < 4) \\ f(x-1) + 2, (x \geq 4) \end{cases}$, 则 $f(5) =$ _____.

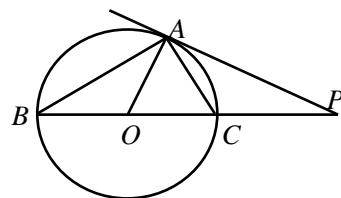
12. $\cos 24^\circ \cos 36^\circ - \cos 66^\circ \cos 54^\circ$ 的值等于 _____.

13. 一个空间几何体的三视图及部分数据如图所示, 则这个几何体的体积是 _____.



14. (坐标系与参数方程选做题) 过点 $(2, \frac{\pi}{3})$ 且平行于极轴的直线的极坐标方程为 _____.

15. (几何证明选讲选做题) 已知 PA 是圆 O 的切线, 切点为 A, 直线 PO 交圆 O 于 B, C 两点, $AC = 2$, $\angle PAB = 120^\circ$, 则圆 O 的面积为 _____.



三、解答题 (共 80 分)

16. (本小题满分 12 分) 已知函数 $f(x) = \sin(\frac{\pi}{2} + x) + \sin(\pi + x)$,

(1) 求函数 $f(x)$ 的最小正周期;



高考资讯站
微信公众号

你身边的高考专家
政策解读 | 志愿指导
学习方法 | 家庭教育
院校介绍 | 专业分析

(2) 求 $f(x)$ 的最大值和最小值;

(3) 若 $f(x) = \frac{1}{4}$, 求 $\sin 2x$ 的值

17. (本小题满分 12 分)

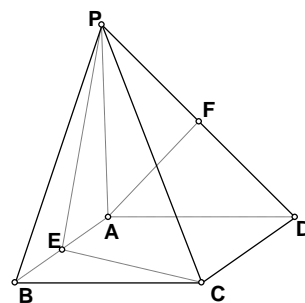
一个盒子中装有 4 张卡片, 每张卡片上写有 1 个数字, 数字分别是 1、2、3、4, 现从盒子中随机抽取卡片.

(1) 若一次从中随机抽取 3 张卡片, 求 3 张卡片上数字之和大于或等于 7 的概率;

(2) 若第一次随机抽 1 张卡片, 放回后再随机抽取 1 张卡片, 求两次抽取中至少一次抽到数字 2 的概率.

18. (14 分) 如图, 四棱锥 $P-ABCD$ 的底面是正方形, $PA \perp$ 底面 $ABCD$, $PA=2$, $\angle PDA=45^\circ$, 点 E 、 F 分别为棱 AB 、 PD 的中点.

(1) 求证: $AF \parallel$ 平面 PCE ; (2) 求证: 平面 $PCE \perp$ 平面 PCD ;



19. (本小题满分 14 分) 已知函数 $f(x) = x^2 - \ln x$.

(1) 求曲线 $f(x)$ 在点 $(1, f(1))$ 处的切线方程;

(2) 求函数 $f(x)$ 的单调递减区间;

(3) 设函数 $g(x) = f(x) - x^2 + ax$, $a > 0$, 若 $x \in (0, e]$ 时, $g(x)$ 的最小值是 3, 求实数 a 的值.

(e 是为自然对数的底数)



20. (本小题满分 14 分) 在经济学中, 函数 $f(x)$ 的边际函数 $Mf(x)$ 定义为 $Mf(x) = f(x+1) - f(x)$, 某公司每月生产 x 台某种产品的收入为 $R(x)$ 元, 成本为 $C(x)$ 元, 且 $R(x) = 3000x - 20x^2$, $C(x) = 600x + 4000(x \in N^*)$, 现已知该公司每月生产该产品不超过 100 台, (利润=收入-成本)

- (1) 求利润函数 $P(x)$ 以及它的边际利润函数 $MP(x)$;
- (2) 求利润函数的最大值与边际利润函数的最大值之差。

21. (本小题满分 14 分) 设函数 $f(x) = a \ln x - bx^2$.

(1) 若函数 $f(x)$ 在 $x=1$ 处与直线 $y = -\frac{1}{2}$ 相切,

①求实数 a, b 的值;

②求函数 $f(x)$ 在 $[\frac{1}{e}, e]$ 上的最大值;

(2) 当 $b=0$ 时, 若不等式 $f(x) \geq m+x$ 对所有的 $a \in [0, \frac{3}{2}]$, $x \in (1, e^2]$ 都成立, 求实数 m 的取值范围.



2018 届高三数学（理科）期中考试参考答案

一、选择题:

DCCAC CDDBC

二、填空题

11. 12 12. $\frac{1}{2}$ 13. $\frac{3}{2}$ 14. $\rho \sin \theta = \sqrt{3}$ 15. 4π

16.

$$\begin{aligned} \text{解: } \because f(x) &= \cos x - \sin x = \sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \cos x - \frac{\sqrt{2}}{2} \sin x \right) \\ &= \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} \cos x - \sin \frac{\pi}{4} \sin x \right) = \sqrt{2} \cos \left(x + \frac{\pi}{4} \right) \dots\dots\dots \end{aligned}$$

(1) $f(x)$ 的最小正周期 $T = \frac{2\pi}{|\omega|} = 2\pi$ 6

(2) $f(x)$ 的最大值为 $\sqrt{2}$, 最小值为 $-\sqrt{2}$

(3) $\because f(x) = \cos x - \sin x = \frac{1}{4}$, 平方得, $1 - 2 \sin x \cos x = \frac{1}{16}$, $\therefore \sin 2x = \frac{15}{16}$ 12

17. 解: (1) 设 A 表示事件“抽取 3 张卡片上的数字之和大于或等于 7”,
任取三张卡片, 三张卡片上的数字全部可能的结果是 (1、2、3), (1、2、4), (1、3、4),
(2、3、4), 共 4 种.....2 分
其中数字之和大于或等于 7 的是 (1、2、4), (1、3、4), (2、3、4),
共 3 种.....4 分
所以 $P(A) = \frac{3}{4}$ 6 分

(2) 设 B 表示事件“至少一次抽到 2”,
每次抽 1 张, 连续抽取两张全部可能的结果有: (1、1) (1、2) (1、3) (1、4) (2、1) (2、
2) (2、3) (2、4) (3、1) (3、2) (3、3) (3、4) (4、1) (4、2) (4、3) (4、4), 共
16 个.....8 分
事件 B 包含的结果有 (1、2) (2、1) (2、2) (2、3) (2、4) (3、2) (4、2), 共 7 个.....10
分
所以所求事件的概率为 $P(B) = \frac{7}{16}$ 12 分





你身边的
高考专家

政策解读 | 志愿指导
学习方法 | 家庭教育
院校介绍 | 专业分析

高考资讯站
微信公众号

18. 证明: (1) 取 PC 的中点 G, 连结 FG、EG,

$\therefore FG$ 为 $\triangle CDP$ 的中位线 $\therefore FG \parallel \frac{1}{2} CD$ 1 分

\therefore 四边形 ABCD 为矩形, E 为 AB 的中点

$\therefore AB \parallel \frac{1}{2} CD$ $\therefore FG \parallel AE$ \therefore 四边形 AEGF 是平行四边形 $\therefore AF \parallel EG$ 3 分

又 $EG \subset$ 平面 PCE, $AF \not\subset$ 平面 PCE $\therefore AF \parallel$ 平面 PCE6 分

(2) $\therefore PA \perp$ 底面 ABCD

$\therefore PA \perp AD, PA \perp CD$, 又 $AD \perp CD, PA \cap AD = A$

$\therefore CD \perp$ 平面 ADP, 又 $AF \subset$ 平面 ADP $\therefore CD \perp AF$ 8 分

直角三角形 PAD 中, $\angle PDA = 45^\circ$

$\therefore \triangle PAD$ 为等腰直角三角形 $\therefore PA = AD = 2$

$\therefore F$ 是 PD 的中点, $\therefore AF \perp PD$, 又 $CD \cap PD = D$

$\therefore AF \perp$ 平面 PCD11 分

$\therefore AF \parallel EG$ $\therefore EG \perp$ 平面 PCD12 分

又 $EG \subset$ 平面 PCE \therefore 平面 PCE \perp 平面 PCD14 分

19.

解: (1) $\because f(x) = x^2 - \ln x, \therefore f'(x) = 2x - \frac{1}{x}$,1 分

则曲线 $f(x)$ 在点 $(1, f(1))$ 处的切线斜率为 $f'(1) = 2 - 1 = 1$ 2 分

又 $f(1) = 1$, 所求切线方程是 $y - 1 = x - 1$, 即 $x - y = 0$3 分

(2) 函数 $f(x) = x^2 - \ln x$ 的定义域是 $(0, +\infty)$ 4 分

令 $f'(x) = 2x - \frac{1}{x} < 0, \because x > 0, \therefore \begin{cases} x^2 < \frac{1}{2} \\ x > 0 \end{cases}$, 解得: $0 < x < \frac{\sqrt{2}}{2}$ 6 分

故函数 $f(x)$ 的单调递减区间是 $(0, \frac{\sqrt{2}}{2})$7 分

(3) $\because g(x) = ax - \ln x, \therefore g'(x) = a - \frac{1}{x} = \frac{ax - 1}{x}$8 分

令 $g'(x) = 0, \because a > 0, x \in (0, e], \therefore x = \frac{1}{a}$9 分

① 当 $\frac{1}{a} \geq e$, 即 $0 < a \leq \frac{1}{e}$ 时, $g'(x) = \frac{ax - 1}{x} \leq 0$ 在 $(0, e]$ 上恒成立, 则函数 $g(x)$ 在

$(0, e]$ 上是减函数, 则由条件知 $g(x)_{\min} = g(e) = ae - 1 = 3, \therefore a = \frac{4}{e}$ (舍去)11 分



高考
资讯
站
微
信
公
众
号

你身边的高考专家

政策解读 | 志愿指导

学习方法 | 家庭教育

院校介绍 | 专业分析

②当 $0 < \frac{1}{a} < e$, 即 $a > \frac{1}{e}$ 时, 列表如下:

x	$(0, \frac{1}{a})$	$\frac{1}{a}$	$(\frac{1}{a}, e)$	e
$g'(x)$	-	0	+	
$g(x)$	单调递减	极小值 $1 + \ln a$	单调递增	$ae - 1$

由表知 $g(x)_{\min} = 1 + \ln a$, 令 $1 + \ln a = 3, \therefore a = e^2$ 满足条件.13分

综上所述, 所求实数 a 的值为 e^214分

20 17. 解: (1) 由题意

$$P(x) = R(x) - C(x) = (3000x - 20x^2) - (600x + 4000) = -20x^2 + 2400x - 4000 \quad \dots\dots$$

...3分

$$\begin{aligned} MP(x) &= P(x+1) - P(x) = [-20(x+1)^2 + 2400(x+1) - 4000] - (-20x^2 + 2400x - 4000) \\ &= 2380 - 40x \end{aligned}$$

$$x \in [1, 100] \quad \text{且}$$

$$x \in \mathbb{N}^* \quad \dots\dots 6 \text{分}$$

$$(2) P(x) = -20(x-60)^2 + 68000, \quad x \in [1, 100] \text{ 且 } x \in \mathbb{N}^*$$

当 $x = 60$ 时, $P(x)$ 的最大值为 68000 元9分

因为 $MP(x) = 2380 - 40x$ 是 $[1, 100]$ 的减函数, $\therefore x = 1$ 时, $MP(x)$ 的最大值为 2340 元.....

12分

故利润函数的最大值与边际利润函数的最大值之差为 65660 元。14分

21. 解: (1) ① $f'(x) = \frac{a}{x} - 2bx$

$$\because \text{函数 } f(x) \text{ 在 } x=1 \text{ 处与直线 } y = -\frac{1}{2} \text{ 相切} \therefore \begin{cases} f'(1) = a - 2b = 0 \\ f(1) = -b = -\frac{1}{2} \end{cases}, \text{解得} \begin{cases} a = 1 \\ b = \frac{1}{2} \end{cases} \dots\dots 3 \text{分}$$

$$\textcircled{2} f(x) = \ln x - \frac{1}{2}x^2, f'(x) = \frac{1}{x} - x = \frac{1-x^2}{x}$$

当 $\frac{1}{e} \leq x \leq e$ 时, 令 $f'(x) > 0$ 得 $\frac{1}{e} \leq x < 1$;

令 $f'(x) < 0$, 得 $1 < x \leq e \therefore f(x)$ 在 $[\frac{1}{e}, 1]$ 上单调递增, 在 $[1, e]$ 上单调递减,



高考资讯站
微信公众号

你身边的高考专家

政策解读 | 志愿指导

学习方法 | 家庭教育

院校介绍 | 专业分析

$$\therefore f(x)_{\max} = f(1) = -\frac{1}{2} \dots\dots\dots 8 \text{分}$$

(2) 当 $b = 0$ 时, $f(x) = a \ln x$ 若不等式 $f(x) \geq m + x$ 对所有的 $a \in \left[0, \frac{3}{2}\right], x \in (1, e^2]$ 都成立,

则 $a \ln x \geq m + x$ 对所有的 $a \in \left[0, \frac{3}{2}\right], x \in (1, e^2]$ 都成立,

即 $m \leq a \ln x - x$ 对所有的 $a \in \left[0, \frac{3}{2}\right], x \in (1, e^2]$ 都成立, $\dots\dots\dots 10 \text{分}$

令 $h(a) = a \ln x - x$, 则 $h(a)$ 为一次函数, $m \leq h(a)_{\min} \because x \in (1, e^2], \therefore \ln x > 0$,

$\therefore h(a)$ 在 $a \in \left[0, \frac{3}{2}\right]$ 上单调递增 $\therefore h(a)_{\min} = h(0) = -x, \therefore m \leq -x$ 对所有的 $x \in (1, e^2]$ 都成立 $\dots\dots\dots 12 \text{分}$

$\because 1 < x < e^2, \therefore -e^2 \leq -x < -1, \therefore m \leq (-x)_{\min} = -e^2 \dots\dots\dots 14 \text{分}$

(注: 也可令 $h(x) = a \ln x - x$, 则 $m \leq h(x)$ 所有的 $x \in (1, e^2]$ 都成立, 分类讨论得

$m \leq h(x)_{\min} = 2a - e^2$ 对所有的 $a \in \left[0, \frac{3}{2}\right]$ 都成立, $\therefore m \leq (2a - e^2)_{\min} = -e^2$, 请根据过程酌情给分)



高
考
资
讯
站
微
信
公
众
号

你 身 边 的 高 考 专 家
政 策 解 读 | 志 愿 指 导
学 习 方 法 | 家 庭 教 育
院 校 介 绍 | 专 业 分 析