海淀区高三年级第一学期期中考试

数学（理科）

2017.11

本试卷共 4 页，150 分。考试时长 120 分钟。考生务必将答案答在答题纸上，在试卷上作答无效。考试结束后，将答题纸交回。

第一部分（选择题，共 40 分）

一、选择题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

（1）若集合 $A=\{x\mid x-2<0\}$， $B=\{x\mid \mathrm{e}^x>1\}$，则 $A\cap B=$ （　　）

（A） $\mathbf{R}$　　（B） $(-\infty,2)$

（C） $(0,2)$　　（D） $(2,+\infty)$

（2）下列函数中，既是偶函数又在区间 $(0,+\infty)$ 上单调递增的是 （　　）

（A） $f(x)=\ln|x|$　　（B） $f(x)=2^{-x}$

（C） $f(x)=x^3$　　（D） $f(x)=-x^2$

（3）已知向量 $\boldsymbol{a}=(1,0)$， $\boldsymbol{b}=(-1,1)$，则 （　　）

（A） $\boldsymbol{a}\,//\,\boldsymbol{b}$　　（B） $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$

（C） $(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\,//\,\boldsymbol{b}$　　（D） $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\perp\boldsymbol{a}$

（4）已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1+a_2+\cdots+a_n=2a_2\,(n=1,2,3,\ldots)$，则 （　　）

（A） $a_1<0$　　（B） $a_1>0$

（C） $a_1\neq a_2$　　（D） $a_2=0$

（5）将 $y=\sin(2x+\frac{\pi}{6})$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位，则所得图象的函数解析式为（　　）

（A） $y=\sin 2x$　　（B） $y=\cos 2x$

（C） $y=\sin(2x+\frac{\pi}{3})$　　（D） $y=\sin(2x-\frac{\pi}{6})$

（6）设 $\alpha\in\mathbf{R}$，则“α 是第一象限角”是“$\sin\alpha+\cos\alpha>1$”的 （　　）

（A）充分而不必要条件　　（B）必要而不充分条件

（C）充分必要条件　　　　　　　　（D）既不充分也不必要条件

（7）设 $f(x)=e^{\sin x}+e^{-\sin x}$（$x\in \mathbf{R}$），则下列说法不正确的是　　（　　）

（A）$f(x)$ 为 $\mathbf{R}$ 上偶函数　　　　　　（B）π 为 $f(x)$ 的一个周期

（C）π 为 $f(x)$ 的一个极小值点　　　　（D）$f(x)$ 在区间 $(0,\dfrac{\pi}{2})$ 上单调递减

（8）已知非空集合 A,B 满足以下两个条件：

（ⅰ）$A\cup B=\{1,2,3,4,5,6\}$，$A\cap B=\varnothing$；

（ⅱ）A 的元素个数不是 A 中的元素，B 的元素个数不是 B 中的元素，

则有序集合对 (A,B) 的个数为　　（　　）

（A）10　　　（B）12　　　（C）14　　　（D）16

第二部分（非选择题，共 110 分）

二、填空题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分。

（9）定积分 $\int_{-1}^{1}x^3dx$ 的值等于________.

（10）设在海拔 x（单位：m）处的大气压强 y（单位：kPa），y 与 x 的函数关系可近似表示为 $y=100e^{ax}$，已知在海拔 1000 m 处的大气压强为 90 kPa，则根据函数关系式，在海拔 2000 m 处的大气压强为________ kPa.

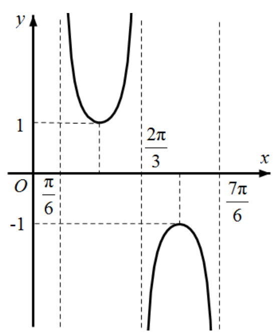
（11）能够说明“设 x 是实数．若 $x>1$，则 $x+\dfrac{1}{x-1}>3$”是假命题的一个实数 x 的值为________.

（12）已知 ΔABC 是边长为 2 的正三角形，O，D 分别为边 AB，BC 的中点，则

① $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AC}=$________；

② 若 $\overrightarrow{OC}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AD}$，则 $x+y=$________.

（13）已知函数 $f(x)=\dfrac{1}{\sin(\omega x+\varphi)}$（其中 $\omega>0$，$|\varphi|<\dfrac{\pi}{2}$）的部分图象如图所示，则 $\omega=$________，$\varphi=$________.



（14）已知函数 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数，

当 $x>0$ 时，$f(x)=x^2-ax+a$，其中 $a\in\mathbf{R}$．

① $f(-1)=$________；

② 若 $f(x)$ 的值域是 $\mathbf{R}$，则 a 的取值范围是________．

三、解答题共 6 小题，共 80 分。解答应写出文字说明，验算步骤或证明过程。

（15）（本小题 13 分）

已知函数 $f(x)=2\sqrt{2}\cos x\sin(x+\dfrac{\pi}{4})-1$．

（Ⅰ）求 $f(\dfrac{\pi}{4})$ 的值；

（Ⅱ）求 $f(x)$ 在区间 $[0,\dfrac{\pi}{2}]$ 上的最大值和最小值．

（16）（本小题 13 分）

已知 $\{a_n\}$ 是等比数列，满足 $a_2=6$，$a_3=-18$，数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_1=2$，且 $\{2b_n+a_n\}$ 是公差为 2 的等差数列．

（Ⅰ）求数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的通项公式；

（Ⅱ）求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和．

（17）（本小题 13 分）

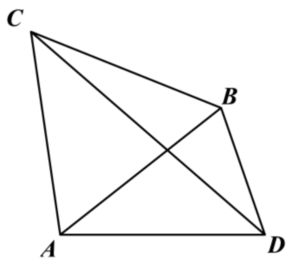
已知函数 $f(x)=x-(a+1)\ln x-\dfrac{a}{x}$，其中 $a>0$．

（Ⅰ）当 $a=2$ 时，求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线方程；

（Ⅱ）求 $f(x)$ 在区间 $[1,\mathrm{e}]$ 上的最小值．（其中 e 是自然对数的底数）

（18）（本小题 13 分）

如图，在四边形 $ACBD$ 中，$\cos\angle CAD=-\dfrac{1}{7}$，且 ΔABC 为正三角形．



（Ⅰ）求 $\cos\angle BAD$ 的值；

（Ⅱ）若 $CD=4$， $BD=\sqrt{3}$，求 AB 和 AD 的长.

（19）（本小题 14 分）

已知函数 $f(x)=\sqrt{2}e^{x}\sin x$ （$0<x<\pi$），$g(x)=(x-1)\quad x+m$ （$m\in\mathbf{R}$）

（Ⅰ）求 $f(x)$ 的单调区间；

（Ⅱ）求证：1 是 $g(x)$ 的唯一极小值点；

（Ⅲ）若存在 a，$b\in(0,\pi)$，满足 $f(a)=g(b)$，求 m 的取值范围.（只需写出结论）

（20）（本小题 14 分）

若数列 A：a_1，a_2，…，a_n （$n\geq 3$）中 $a_i\in\mathbf{N}^*$ （$1\leq i\leq n$）且对任意的 $2\leq k\leq n-1$

$a_{k+1}+a_{k-1}>2a_k$ 恒成立，则称数列 A 为"U − 数列".

（Ⅰ）若数列 1，x，y，7 为"U − 数列"，写出所有可能的 x，y；

（Ⅱ）若"U − 数列" A：a_1，a_2，…，a_n 中，$a_1=1$，$a_n=2017$，求 n 的最大值；

（Ⅲ）设 n_0 为给定的偶数，对所有可能的"U − 数列" A：a_1，a_2，…，a_{n_0}，

记 $M=\max\{a_1,a_2,\ldots,a_{n_0}\}$，其中 $\max\{x_1,x_2,\ldots,x_s\}$ 表示 x_1，x_2，…，x_s 这 s 个数中最大的数，求 M 的最小值.

海淀区高三年级第一学期期中考试参考答案 2017.11

数 学（理科）

阅卷须知:

1. 评分参考中所注分数，表示考生正确做到此步应得的累加分数.

2. 其它正确解法可以参照评分标准按相应步骤给分.

一、选择题：本大题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分.

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
选项	C	A	D	D	B	C	D	A

二、填空题:本大题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分.（有两空的小题第一空 3 分）

9．0　　10．81　　11．2　　12．（1）3　（2）$\frac{1}{2}$

13． 2，$-\frac{\pi}{3}$　　14．（1）-1　（2）$(-\infty,0]\cup[4,+\infty)$

三、解答题：本大题共 6 小题，共 80 分.

15．（本题 13 分）

解：（Ⅰ）因为 $f(\frac{\pi}{4})=2\sqrt{2}\cos\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{2}-1$ ...1 分

$=2\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}\times1-1$ ....2 分

$=1$ ....3 分

（Ⅱ）$f(x)=2\sqrt{2}\cos x\sin(x+\frac{\pi}{4})-1$

$=2\sqrt{2}\cos x\cdot(\frac{\sqrt{2}}{2}\sin x+\frac{\sqrt{2}}{2}\cos x)-1$ ....4 分

$=2\sin x\cos x+2\cos^2 x-1$

$= \sin 2x + \cos 2x$ ……………………8 分

（一个公式 2 分）

$= \sqrt{2}\sin(2x + \frac{\pi}{4})$ …………10 分

因为 $0 \le x \le \frac{\pi}{2}$， 所以 $\frac{\pi}{4} \le 2x + \frac{\pi}{4} \le \frac{5\pi}{4}$ ……11 分

所以 $-\frac{\sqrt{2}}{2} \le \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) \le$ 故 $-1 \le \sqrt{2}\sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) \le \sqrt{2}$

当 $2x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$，即 $x = \frac{\pi}{8}$ 时， $f(x)$ 有最大值 $\sqrt{2}$

当 $2x + \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{4}$，即 $x = \frac{\pi}{2}$ 时， $f(x)$ 有最小值 -1 …13 分

（函数最大值和最小值结果正确 1 分，写出取得最大值和最小值时对应自变量的取值 1 分）

16.（本题 13 分）

解：（Ⅰ）设数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q， 则

$$\begin{cases} a_2 = a_1 q = 6 \\ a_3 = a_1 q^2 = -18 \end{cases}$$ ……………………2 分

解得 $a_1 = -2$， $q = -3$ ……3 分

所以， $a_n = -2 \times (-3)^{n-1}$ ……5 分

令 $c_n = 2b_n + a_n$， 则 $c_1 = 2b_1 + a_1 = 2$

$c_n = 2 + (n-1) \times 2 = 2n$ ……………………7 分

$b_n = \frac{c_n - a_n}{2} = n + (-3)^{n-1}$ ……………………9 分

（Ⅱ） $S_n = \frac{n(n+1)}{2} + \frac{1-(-3)^n}{4}$ ……13 分

（分组求和，每组求对给 2 分）

17.（本题 13 分）

解：（Ⅰ）当 $a=2$ 时，$f(x)=x-3\ln x-\frac{2}{x}$ $f'(x)=\frac{(x-1)(x-2)}{x^2}$，……1 分

此时，$f(1)=-1$，$f'(1)=0$，……2 分

故曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线方程为 $y=-1$．………3 分

（Ⅱ）$f(x)=x-(a+1)\ln x-\frac{a}{x}$ 的定义域为 $(0,+\infty)$ ……4 分

$$f'(x)=1-\frac{a+1}{x}+\frac{a}{x^2}=\frac{(x-1)(x-a)}{x^2}$$ ……………………5 分

令 $f'(x)=0$ 得，$x=a$ 或 $x=1$ ……6 分

① 当 $0<a\le 1$ 时，

对任意的 $1<x<\mathbf{e}$，$f'(x)>0$，$f(x)$ 在 $[1,\mathbf{e}]$ 上单调递增 ……7 分

$f(x)_{最小}=f(1)=1-a$ …………8 分

② 当 $1<a<\mathbf{e}$ 时

x	$(1,a)$	a	$(a,\mathbf{e})$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	极小	↗

…………10 分

$f(x)_{最小}=f(a)=a-1-(a+1)\cdot\ln a$

…………11 分

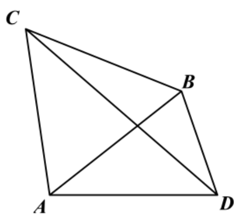
② 当 $a\ge\mathbf{e}$ 时，

对任意的 $1<x<\mathbf{e}$，$f'(x)<0$，$f(x)$ 在 $[1,\mathbf{e}]$ 上单调递减 ……12 分

$f(x)_{最小}=f(\mathbf{e})=\mathbf{e}-(a+1)-\frac{a}{\mathbf{e}}$ …………………… 13 分

由①、②、③可知，$g(a)=\begin{cases}1-a, & 0<a\le 1\\ a-1-(a+1)\cdot\ln a, & 1<a<\mathbf{e}\\ \mathbf{e}-(a+1)-\frac{a}{\mathbf{e}}, & a\ge\mathbf{e}\end{cases}$

18．（本题 13 分）



解：（Ⅰ）因为 $\cos\angle CAD=-\frac{1}{7}$，$\angle CAD\in(0,\pi)$

所以 $\sin\angle CAD=\dfrac{4\sqrt{3}}{7}$

.... 2 分　　（没写角取值范围的扣 1 分 ）

所以 $\cos\angle BAD$

$=\cos(\angle CAD-\dfrac{\pi}{3})$

$=\cos\angle CAD\cos\dfrac{\pi}{3}+\sin\angle CAD\sin\dfrac{\pi}{3}$ ....4 分

$=-\dfrac{1}{7}\cdot\dfrac{1}{2}+\dfrac{4\sqrt{3}}{7}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$=\dfrac{11}{14}$ .... 6 分

（Ⅱ）设 $AB=AC=BC=x$， $AD=y$，在 ΔACD 和 ΔABD 中由余弦定理得

$$\begin{cases}AC^2+AD^2-2AC\cdot AD\cos\angle CAD=CD^2\\ AB^2+AD^2-2AB\cdot AD\cos\angle BAD=BD^2\end{cases}$$ ....10 分

（每个公式给 2 分）

代入得 $\begin{cases}x^2+y^2+\dfrac{2}{7}xy=16\\ x^2+y^2-\dfrac{11}{7}xy=3\end{cases}$

解得 $\begin{cases}x=\sqrt{7}\\ y=\sqrt{7}\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x=-\sqrt{7}\\ y=-\sqrt{7}\end{cases}$ （舍）

即 $AB=\sqrt{7}$， $AD=\sqrt{7}$ ......13 分

19.（本题 14 分）

解：（Ⅰ） 因为 $f'(x)=\sqrt{2}(\mathbf{e}^x\sin x+\mathbf{e}^x\cos x)$ ......2 分

$=2\mathbf{e}^x\sin(x+\dfrac{\pi}{4})$

令 $f'(x)=0$，得 $\sin(x+\dfrac{\pi}{4})=0$

因为 $0<x<\pi$，所以 $x=\dfrac{3}{4}\pi$ ......3 分

当 x 变化时，$f'(x)$，$f(x)$ 的变化情况如下：

x	$(0,\dfrac{3}{4}\pi)$	$\dfrac{3}{4}\pi$	$(\dfrac{3}{4}\pi,\pi)$
$f'(x)$	+	0	−
$f(x)$	↗	极大值	↘

.... 5 分

故 $f(x)$ 的单调递增区间为 $(0,\dfrac{3\pi}{4})$，$f(x)$ 的单调递减区间为 $(\dfrac{3\pi}{4},\pi)$

......6 分

（Ⅱ）证明：∵ $g(x)=(x-1)\ln x+m$

∴ $g'(x)=\ln x-\dfrac{1}{x}+1$ （$x>0$）， ......7 分

设 $h(x)=g'(x)=\ln x-\dfrac{1}{x}+1$，则 $h'(x)=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}>0$

故 $g'(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 是单调递增函数， ......8 分

又∵ $g'(1)=0$，故方程 $g'(x)=0$ 只有唯一实根 $x=1$ ......10 分

当 x 变化时，$g'(x)$，$g(x)$ 的变化情况如下：

x	$(0,1)$	1	$(1,+\infty)$
$g'(x)$	−	0	+
$g(x)$	↘	极小值	↗

............12 分

故 $g(x)$ 在 $x=1$ 时取得极小值 $g(1)=m$，即 1 是 $g(x)$ 的唯一极小值点.

（Ⅲ）$m\le \mathrm{e}^{\frac{3\pi}{4}}$ ......14 分

20.（本题 14 分）

解：（Ⅰ）$\begin{cases}x=1\\y=2\end{cases}$，$\begin{cases}x=1\\y=3\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x=2\\y=4\end{cases}$ ......3 分

（Ⅱ）n 的最大值为65，理由如下　　　　　　　　　　　　……4 分

一方面，注意到：$a_{k+1}+a_{k-1}>2a_k \Leftrightarrow a_{k+1}-a_k>a_k-a_{k-1}$

对任意的$1\le i\le n-1$，令$b_i=a_{i+1}-a_i$，则$b_i\in \mathbf{Z}$ 且$b_k>b_{k-1}$（$2\le k\le n-1$），

故$b_k\ge b_{k-1}+1$对任意的$2\le k\le n-1$恒成立.

（★）

当$a_1=1$，$a_n=2017$时，注意到$b_1=a_2-a_1\ge 1-1=0$，得

$$b_i=(b_i-b_{i-1})+(b_{i-1}-b_{i-2})+\cdots+(b_2-b_1)+b_1\ge i-1 \quad (2\le i\le n-1)$$

此时

$$a_n-a_1=b_1+b_2+\cdots+b_{n-1}\ge 0+1+2+\cdots+n-2=\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$$

即$\frac{1}{2}(n-1)(n-2)\le 2017-1$，解得：$-62\le n\le 65$，故$n\le 65$　　……7 分

另一方面，取$b_i=i-1$（$1\le i\le 64$），则对任意的$2\le k\le 64$，$b_k>b_{k-1}$，故数列$\{a_n\}$为“U – 数列”，此时$a_{65}=1+0+1+2+\cdots+63=2017$，即$n=65$符合题意.

综上，n 的最大值为65.　　　　　　　　　　　　…………9 分

（Ⅲ）M 的最小值为$\dfrac{n_0^{\ 2}-2n_0+8}{8}$，证明如下：　　　　　　…………………… 10 分

当$n_0=2m$（$m\ge 2$，$m\in \mathbf{N}^*$）时，

一方面：

由（★）式，$b_{k+1}-b_k\ge 1$，

$$b_{m+k}-b_k=(b_{m+k}-b_{m+k-1})+(b_{m+k-1}-b_{m+k-2})+\cdots+(b_{k+1}-b_k)\ge m.$$

此时有：

$$\begin{aligned}
&(a_1+a_{2m})-(a_m+a_{m+1})\\
&=(b_{m+1}+b_{m+2}+\cdots+b_{2m-1})-(b_1+b_2+\cdots+b_{m-1})\\
&=(b_{m+1}-b_1)+(b_{m+2}-b_2)+\cdots+(b_{2m-1}-b_{m-1})\\
&\ge m+m+\cdots+m\\
&=m(m-1)
\end{aligned}$$

故 $M \geq \frac{a_1 + a_{2m}}{2} \geq \frac{a_m + a_{m+1} + m(m-1)}{2} \geq \frac{m^2 - m + 2}{2} = \frac{n_0^2 - 2n_0 + 8}{8}$ ……13 分

另一方面，当 $b_1 = 1 - m$，$b_2 = 2 - m$，…，$b_{m-1} = -1$，$b_m = 0$，$b_{m+1} = 1$，…，$b_{2m-1} = m - 1$ 时，$a_{k+1} + a_{k-1} - 2a_k = (a_{k+1} - a_k) - (a_k - a_{k-1}) = b_k - b_{k-1} = 1 > 0$

取 $a_m = 1$，则 $a_{m+1} = 1$，$a_1 > a_2 > a_3 > \cdots > a_m$，$a_{m+1} < a_{m+2} < \cdots < a_{2m}$，且

$$a_1 = a_m - (b_1 + b_2 + \cdots + b_{m-1}) = \frac{1}{2}m(m-1) + 1$$

$$a_{2m} = a_{m+1} + (b_{m+1} + b_{m+2} + \cdots + b_{2m-1}) = \frac{1}{2}m(m-1) + 1$$

此时 $M = a_1 = a_{2m} = \frac{1}{2}m(m-1) + 1 = \frac{n_0^2 - 2n_0 + 8}{8}$.

综上，M 的最小值为 $\frac{n_0^2 - 2n_0 + 8}{8}$.

……………14 分