成都七中 2017—2018 学年度上期高 2018 届半期考试

数学试卷（理科）

考试时间：120 分钟　　满分：150 分

第 I 卷（选择题，共 60 分）

一. 选择题（本大题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分. 在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的）

1. 已知集合 $A=\{x\mid x>2\}$，$B=\{x\mid x(1-x)>0\}$，则 $A\cap B=$

A. $\{x\mid x>1\}$　B. $\{x\mid x>2\}$　C. $\{x\mid x>2或x<0\}$　D. $\varnothing$

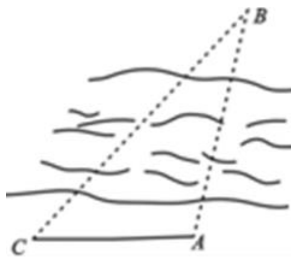
2. 命题“$m=-2$”是命题“直线 $2x+my-2m+4=0$ 与直线 $mx+2y-m+2=0$ 平行”的

A. 充要条件　B. 充分不必要条件　C. 必要不充分条件　D. 既不充分也不必要条件

3. 设 $\{a_n\}$ 为等差数列，公差 $d=-2$，S_n 为其前 n 项和. 若 $S_{10}=S_{11}$，则 $a_1=$

A.18　B.20　C.22　D.24

4. 如图，设 *A*、*B* 两点在河的两岸，一测量者在 *A* 的同侧河岸选定一点 *C*，测出 *AC* 的距离为 50 米，∠*ACB*=45°，∠*CAB*=105°，则 *A*、*B* 两点的距离为



A. $50\sqrt{2}$ 米　B. $50\sqrt{3}$ 米　C. $25\sqrt{2}$ 米　D. $\dfrac{25\sqrt{2}}{2}$ 米

5. 若等比数列 $\{a_n\}$ 的前 5 项的乘积为 1，$a_6=8$，则数列 $\{a_n\}$ 的公比为

A. -2　B. 2　C. ±2　D. $\dfrac{1}{2}$

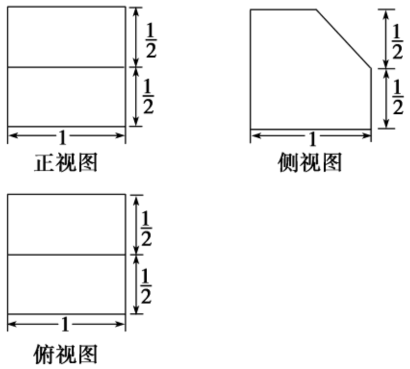
6. 设 $a=\log_{\frac{1}{2}}3$，$b=\left(\dfrac{1}{3}\right)^{0.2}$，$c=2^{\frac{1}{3}}$，则

A. $a<b<c$　B. $c<b<a$　C. $c<a<b$　D. $b<a<c$

7. 曲线 $y=-x^2+2x$ 与 x 轴围成的一个封闭图形的面积为

A. 1　B. $\dfrac{4}{3}$　C. $\sqrt{3}$　D. 2

8. 若某多面体的三视图(单位：cm)如图所示，则此多面体的体积是

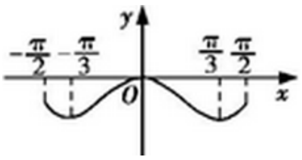


A. $\frac{1}{2}$ cm^3　　B. $\frac{2}{3}$ cm^3　　C. $\frac{5}{6}$ cm^3　　D. $\frac{7}{8}$ cm^3

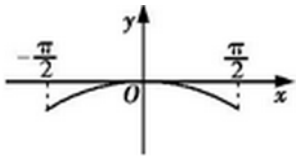
9. 把函数 $y=\sin^2(x+\frac{\pi}{6})-\cos^2(x+\frac{\pi}{6})$ 的图像向左平移 φ(φ>0)个单位就得到了一个奇函数的图像，则 φ 的最小值是

A. $\frac{5\pi}{12}$　　B. $\frac{\pi}{6}$　　C. $\frac{\pi}{12}$　　D. $\frac{\pi}{3}$

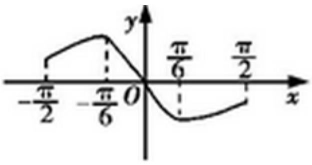
10. 函数 $y=x-2\sin x, x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ 的图像大致为



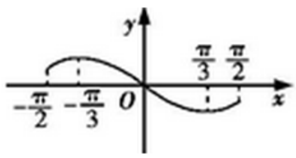
A.



B.

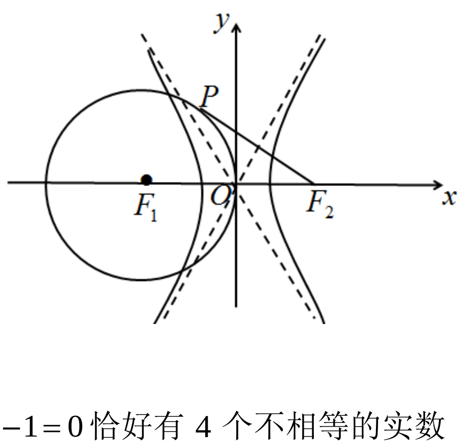


C.



D.

11. 已知 F_1、 F_2 分别是双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的左、右焦点，点 F_2 关于渐近线的对称点 P 恰好落在以 F_1 为圆心、$|OF_1|$ 为半径的圆上，则双曲线的离心率为



A. 3　　B. $\sqrt{3}$　　C. 2　　D. $\sqrt{2}$

12. 已知 $f(x)=\frac{|x|}{e^x}$ ($x\in\mathbf{R}$)，若关于 x 的方程 $f^2(x)-mf(x)+m-1=0$ 恰好有 4 个不相等的实数解，则实数 m 的取值范围为

A. $\left(\frac{1}{e},2\right)\cup(2,e)$　　B. $\left(\frac{1}{e},1\right)$　　C. $\left(1,\frac{1}{e}+1\right)$　　D. $\left[\frac{1}{e},e\right]$

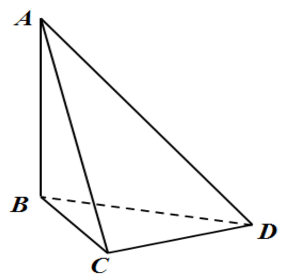
第 II 卷（非选择题，共 90 分）

二. 填空题（本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分）

13. 已知抛物线 $y^2=2px(p>0)$ 上横坐标为 3 的点到其焦点的距离为 4，则 $p=$______

14. 已知平面向量 $\boldsymbol{a}=(2m+1,3)$与 $\boldsymbol{b}=(2,m)$是共线向量且$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}<0$，则 $|\boldsymbol{b}|=$______

15. 刘徽（约公元 225 年—295 年）是魏晋时期伟大的数学家，中国古典数学理论的奠基人之一，他的杰作《九章算术注》和《海岛算经》是中国宝贵的古代数学遗产. 《九章算术 商功》中有这样一段话：“斜解立方，得两堑堵. 斜解堑堵，其一为阳马，一为鳖臑.” 刘徽注：“此术臑者，背节也，或曰半阳马，其形有似鳖肘，故以名云.” 其实这里所谓的“鳖臑（biē nào）”，就是在对长方体进行分割时所产生的四个面都为直角三角形的三棱锥. 如图，在三棱锥 A-BCD 中，AB 垂直于平面 BCD，AC 垂直于 CD，且 $AB=BC=CD=1$，则三棱锥 A-BCD 的外接球的球面面积为______



16. 已知ω是正数，且函数 $f(x)=\sin\omega x-\sqrt{3}\cos\omega x$ 在区间$\left(\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{2}\right)$上无极值，则$\omega$ 的取值范围是______

三. 解答题（本大题共 7 小题，共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤）

17. （本题满分 12 分）

已知数列$\{a_n\}$满足 $a_1=1$，$a_{n+1}=2S_n+1$，其中 S_n 为$\{a_n\}$的前 n 项和，$n\in\mathbf{N}^*$.

(1) 求 a_n；

(2) 若数列$\{b_n\}$满足 $b_n=\dfrac{1}{(1+\log_3 a_n)(3+\log_3 a_n)}$，$\{b_n\}$的前 n 项和为T_n，且对任意的正整数 n 都有 $T_n<m$，求 m 的最小值.

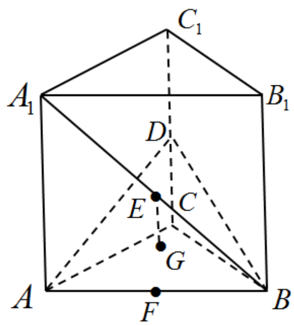
18. （本题满分 12 分）

设 ΔABC 三个内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c，ΔABC 的面积 S 满足 $4\sqrt{3}S=a^2+b^2-c^2$.

(1) 求角 C 的值；

(2) 求$\sin B-\cos A$的取值范围.

19. （本题满分 12 分）



如图，在直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，底面是等腰直角三角形，$\angle ACB=90°$，侧棱 $AA_1=2$，点 D、E、F 分别为棱 CC_1、A_1B、AB 的中点，ΔABD 的重心为 G，直线 EG 垂直于平面 ABD.

(1) 求证：直线 CF // 平面 A_1BD；

(2) 求二面角 A_1-BD-C 的余弦.

20. （本题满分 12 分）

已知椭圆 C：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左、右焦点分别为 F_1、F_2 且离心率为 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，Q、A、B 为椭圆 C 上三个点，ΔQF_1F_2 的周长为 $4\left(\sqrt{2}+1\right)$，线段 AB 的垂直平分线经过点 $P\left(-1,0\right)$.

(1) 求椭圆 C 的方程；

(2) 求线段 AB 长度的最大值.

21. （本题满分 12 分）

已知函数 $f\left(x\right)=\ln\left(ax+1\right)-\dfrac{x-1}{x+1}$，$a\in\mathbf{R}$.

(1) 若 $f\left(x\right)$ 在 $x=1$ 时取到极值，求 a 的值及 $f\left(x\right)$ 的图像在 $x=1$ 处的切线方程；

(2) 若 $f\left(x\right)\geq\ln 2$ 在 $x\geq 0$ 时恒成立，求 a 的取值范围.

请考生在第 22、23 题中任选一题作答，如果多做，则按所做的第一个题目计分. 请考生用 2B 铅笔将答题卡上所做题目的题号涂黑.

22. （本题满分 10 分）选修 4-4：坐标系与参数方程

在平面直角坐标系中，以坐标原点 O 为极点，x 轴的正半轴为极轴建立极坐标系，直线 l 上两点 M，N 的极坐标分别为(2,0)，$\left(\dfrac{2\sqrt{3}}{3},\ \dfrac{\pi}{2}\right)$. 圆 C 的参数方程为 $\begin{cases}x=2+2\cos\theta,\\ y=-\sqrt{3}+2\sin\theta\end{cases}$ (θ 为参数).

(1) 设 P 为线段 MN 的中点，求直线 OP 的平面直角坐标方程；

(2) 判断直线 l 与圆 C 的位置关系

23. （本题满分 10 分）选修 4-5：不等式选讲

已知函数 $f(x)=m-|x-1|$，$m\in\mathbf{R}$，且 $f(x+2)+f(x-2)\geq 0$ 的解集为[－2,4].

(1) 求 m 的值；

(2) 若 a，b，c 为正实数，且 $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{2b}+\dfrac{1}{3c}=m$，求证：$a+2b+3c\geq 3$.

成都七中 2017—2018 学年度上期高三数学期中考试参考答案与评分标准

一、选择题：DABABA　BDCDCC

二、填空题：13. 2　14. $2\sqrt{2}$　15. 3π　16. $(0,\frac{5}{3}]\cup[\frac{10}{3},\frac{11}{3}]$

三、解答题

17 理：(1) $a_{n+1}=2S_n+1$，$a_n=2S_{n-1}+1,n\geq 2$，

两式相减得 $a_{n+1}-a_n=2a_n$，$a_{n+1}=3a_n$，$n\geq 2$……..3 分

注意到 $a_1=1,a_2=2S_1+1=3=3a_1$……………………..4 分

于是 $\forall n\geq 1,a_{n+1}=3a_n$，所以 $a_n=3^{n-1}$………………..6 分

(2) $b_n=\frac{1}{n(n+2)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)$……………………….7 分

$T_n=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)=\frac{1}{2}\left((1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n})-(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{n+2})\right)$………………9 分

$T_n=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)<\frac{3}{4}$…………………11 分

所以 m 的最小值为 $\frac{3}{4}$………………………………..12 分

18. (1) $\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab},a^2+b^2-c^2=2ab\cos C$…………1 分

$S=\frac{a^2+b^2-c^2}{4\sqrt{3}}=\frac{2ab\cos C}{4\sqrt{3}}=\frac{1}{2}ab\sin C$………………………..4 分

$\tan C=\frac{\sqrt{3}}{3},C=\frac{\pi}{6}$……………………………………………..….6 分

(2) $\sin B-\cos A=-\cos\left(A+\frac{\pi}{3}\right)$ 或者 $\sin\left(A-\frac{\pi}{6}\right),\sin\left(B+\frac{\pi}{3}\right),\cos\left(\frac{\pi}{6}-B\right)$……..9 分

因为 $A\in\left(0,\frac{5\pi}{6}\right)$，所以 $A+\frac{\pi}{3}\in\left(\frac{\pi}{3},\frac{7\pi}{6}\right)$，$\cos\left(A+\frac{\pi}{3}\right)\in(-\frac{1}{2},1]$，所以 $\sin B-\cos A\in(-\frac{1}{2},1]$………..12 分

19 理：(1) 连结 DE，EF，FC，则在三角形 A_1AB 中 EF 为中位线，于是 $EF\,//\,A_1A$，$EF=\frac{1}{2}A_1A$…………..2 分

因为 D 为 C_1C 中点，所以 EF 平行且等于 DC . 所以在平行四边形 $EFCD$ 中，CF 平行于 DE

因为 DE 在平面 A_1BD 上，所以 CF 平行于平面 A_1BD……………………………………………………..……..4 分

(2) 分别以 CA,CB,CC_1 为 x,y,z 轴建立空间直角坐标系.

设 $CA=a$，则 $A(a,0,0),B(0,a,0),D(0,0,1),A_1(a,0,2),E(\frac{a}{2},\frac{a}{2},1),G(\frac{a}{3},\frac{a}{3},\frac{1}{3})$……………6 分

因为 EG 垂直于平面 ABD，所以有 $\overrightarrow{EG}\cdot\overrightarrow{AB}=0$， $\overrightarrow{EG}\cdot\overrightarrow{AD}=0$，解得 $a=2$

所以 $AB=2\sqrt{2}$ ……………………………………………9 分

面 ABC 的法向量 $\boldsymbol{n}=(0,0,1)$，面 ABD 的法向量为 $\overrightarrow{EG}=\left(-\frac{1}{3},-\frac{1}{3},-\frac{2}{3}\right)$

所以 $\cos<n,\overrightarrow{EG}>=\frac{\sqrt{6}}{3}$ ………………………………………………………11 分

结合图形知，二面角 A_1-BD-C 的余弦为 $-\frac{\sqrt{6}}{3}$ ……………………………..12 分

20 理：(1) $2a+2c=4\left(\sqrt{2}+1\right)$， $\frac{c}{a}=\frac{1}{\sqrt{2}}$ ……………………..……2 分

$c=2,a=2\sqrt{2},b=2$ ……………………………………………..……3 分

$\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{4}=1$ ……………………………………………………..……4 分

(2) 当 AB 斜率不存在时， AB 最大值为 4……………………….5 分

当 AB 斜率存在时，设 AB： $y=kx+m$

联列 $y=kx+m$， $\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{4}=1$ 得： $x^2+2(kx+m)^2=8$， $(1+2k^2)x^2+4kmx+2m^2-8=0$ ………..6 分

AB 中点坐标为 $(\frac{-2km}{1+2k^2},\frac{m}{1+2k^2})$ ……………………………………………………………………..……7 分

因为 AB 的中垂线过了(-1,0)，所以 $\frac{\frac{m}{1+2k^2}}{\frac{-2km}{1+2k^2}+1}=-\frac{1}{k}$(若 k 为 0 则 AB 中垂线为 y 轴，这与题意不符)

化简得： $-\frac{1}{k}=\frac{m}{1+2k^2-2km},-km=1+2k^2-2km,m=\frac{1}{k}+2k$ ……………………………..………..9 分

所以 $|AB|=\sqrt{1+k^2}\left|x_1-x_2\right|=\sqrt{1+k^2}\ \frac{\sqrt{16k^2m^2-4\left(2k^2+1\right)\left(2m^2-8\right)}}{1+2k^2}=\sqrt{1+k^2}\ \frac{\sqrt{-8m^2+64k^2+32}}{1+2k^2}$

$=2\sqrt{2}\sqrt{1+k^2}\ \frac{\sqrt{-\left(\frac{1}{k}+2k\right)^2+8k^2+4}}{1+2k^2}=2\sqrt{2}\sqrt{1+k^2}\ \frac{\sqrt{4k^2-\frac{1}{k^2}}}{1+2k^2}=2\sqrt{2}\sqrt{1+k^2}\ \frac{\sqrt{\frac{2k^2-1}{k^2}}}{\sqrt{1+2k^2}}$

$=2\sqrt{2}\sqrt{\frac{\left(2k^2-1\right)\left(1+k^2\right)}{k^2\left(1+2k^2\right)}}=2\sqrt{2}\sqrt{\frac{2k^4+k^2-1}{2k^4+k^2}}<2\sqrt{2}<4$ ………………………………….…11 分

所以 AB 最大值为 4…………………………………………………………………………………..12 分

21 理：(1) $f'(x)=\dfrac{a}{ax+1}-\dfrac{2}{(1+x)^2}=\dfrac{ax^2+a-2}{(ax+1)(1+x)^2}$，……………………………………1 分

∵ $f(x)$ 在 $x=1$ 处取得极值，∴ $f'(1)=0$ ，解得 $a=1$.……………………..3 分

故在 x=1 处的切线方程为：$y=\ln 2$ ……………………………………………………4 分

(2) 由定义域知：$ax+1>0$ 对于 $x\ge 0$ 恒成立，可得 $a\ge 0$

$f'(x)=\dfrac{ax^2+a-2}{(ax+1)(1+x)^2}$，

①当 $a=0$ 时，在 $(0,+\infty)$ 上，$f'(x)<0$ 恒成立，所以此时 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 递减

注意到 $f(2)=-\dfrac{1}{3}<0<\ln 2$，故此时 $f(x)\ge\ln 2$ 不恒成立 …………………………………………………6 分

②当 $a\ge 2$ 时，在区间 $(0,+\infty)$ 上，$f'(x)>0$ 恒成立，所以此时 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 递增

$f(x)\ge f(0)=1>\ln 2$，故此时 $f(x)\ge\ln 2$ 恒成立……………………………………8 分

③当 $0<a<2$ 时，$f(x)$ 的单调减区间为 $\left(0,\sqrt{\dfrac{2-a}{a}}\right)$，单调增区间为 $\left(\sqrt{\dfrac{2-a}{a}},+\infty\right)$.

$f(x)$ 在 $x=\sqrt{\dfrac{2-a}{a}}$ 处取得最小值，只需 $f\left(\sqrt{\dfrac{2-a}{a}}\right)\ge\ln 2$ 恒成立

设 $f\left(\sqrt{\dfrac{2-a}{a}}\right)=g(a)=\ln\left(\sqrt{a(2-a)}+1\right)+\dfrac{1-\sqrt{\dfrac{2-a}{a}}}{1+\sqrt{\dfrac{2-a}{a}}}$ $(0<a<2)$，

设 $t=\sqrt{\dfrac{2-a}{a}}\in(0,+\infty)$，$m(t)=f(\sqrt{\dfrac{2-a}{a}})=\ln(\dfrac{2t}{t^2+1}+1)+\dfrac{1-t}{1+t}$

$m'(t)=\dfrac{-4t^2}{(t+1)^2(t^2+1)}<0$，$m(t)$ 在 $(0,+\infty)$ 递减；又 $m(1)=\ln 2$

所以 $t\le 1$ 即 $\sqrt{\dfrac{2-a}{a}}\le 1$，解得 $1\le a<2$

……………………………………11 分

综上可知，若 $f(x)\ge\ln 2$ 恒成立，只需 a 的取值范围是 $[1,+\infty)$ …………………………………..12 分

22. (1) M、N 的平面直角坐标为(2,0)、(0, $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$)……………..2 分

于是 P 的坐标为(1, $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$)……………………………………….…4 分

所以 OP 直线的方程为：$y=\dfrac{\sqrt{3}}{3}x$ （$x-\sqrt{3}y=0$）……………..5 分

(2) 直线 l 的方程为：$x+\sqrt{3}y-2=0$……………………………6 分

圆 C 的方程为：$\left(x-2\right)^2+\left(y+\sqrt{3}\right)^2=4$…………………….….7 分

C 到 l 的距离 $d=\frac{3}{2}<2$……………………………………….….9 分

所以 l 与 C 相交………………………………………………..10 分

23. (1) $|x+1|+|x-3|\le 2m$…………………………………………1 分

设 $g\left(x\right)=|x+1|+|x-3|$，则当 $x\le -1$ 时，$g\left(x\right)=-2x+2$；

当 $-1<x<3$ 时，$g\left(x\right)=4$；当 $x\ge 3$ 时，$g\left(x\right)=2x-2$ …………….3 分

所以 $g\left(-2\right)=g\left(4\right)=6=2m$，$m$=3…………………………….……5 分

(2) $\frac{1}{a}+\frac{1}{2b}+\frac{1}{3c}=3$………………………………………….….6 分

由柯西不等式，$(a+2b+3c)(\frac{1}{a}+\frac{1}{2b}+\frac{1}{3c})\ge(\sqrt{a\cdot\frac{1}{a}}+\sqrt{2b\cdot\frac{1}{2b}}+\sqrt{3c\cdot\frac{1}{3c}})^2=3^2$……………9 分

所以 $a+2b+3c\ge 3$……………………………………………10 分