\ 数学学科 /

命题角度 1——立体几何

押题 1　已知 α 表示平面，m,n 表示两条不同直线. 下列说法正确的是　(　　)

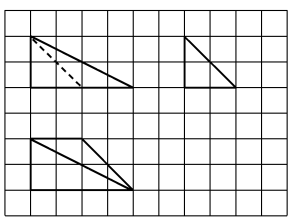
A. 若 $m/\!/\alpha,n/\!/\alpha$，则 $m/\!/n$　B. 若 $m/\!/\alpha,n\subset\alpha$，则 $m/\!/n$

C. 若 $m\perp\alpha,n/\!/\alpha$，则 $m\perp n$　D. 若 $m/\!/\alpha,m\perp n$，则 $n\perp\alpha$

押题 2　在三棱锥 $P\text{-}ABC$ 中 $AB=\sqrt{6}$，$BC=\sqrt{10}$，$PA=2\sqrt{3}$，$PC=2$，$\angle APC=\frac{\pi}{2}$，则三棱锥 $P\text{-}ABC$ 外接球的表面积为　(　　)

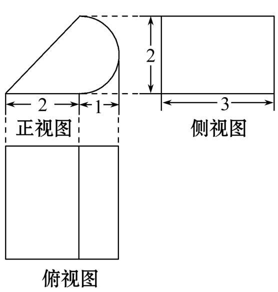
A. 4π　B. $\frac{16}{3}\pi$　C. $\frac{32}{3}\pi$　D. 16π

押题 3　如图所示，网格纸上小正方形的边长为 1 cm，粗线为某空间几何体的三视图，则该几何体的体积为　(　　)



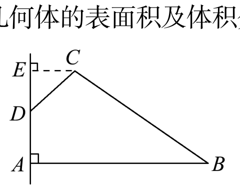
A. 2 cm^3　B. 4 cm^3　C. 6 cm^3　D. 8 cm^3

押题 4　某几何体的三视图如图所示，其正视图中的曲线部分为半圆，则该几何体的体积是　(　　)

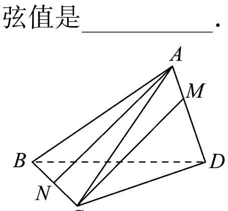


A. $4+\frac{3}{2}\pi$　B. $6+3\pi$　C. $6+\frac{3}{2}\pi$　D. $12+\frac{3}{2}\pi$

押题 5　如图，在四边形 $ABCD$ 中，$AB=5$，$AD=2$，$CD=2\sqrt{2}$，$\angle DAB=90°$，$\angle ADC=135°$，则该四边形 $ABCD$ 绕 AD 旋转一周所成几何体的表面积及体积分别是________.

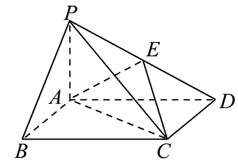


押题 6　已知，正四面体 $A\text{-}BCD$，棱长为 3，点 M 是 AD 靠近 A 点的三等分点，N 是 BC 的中点，则异面直线 AN，CM 所成的角的余弦值是__________.



二、解答题

押题 1　如图，四棱锥 $P\text{-}ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 为矩形，$PA\perp$ 平面 $ABCD$，E 为 PD 的中点.



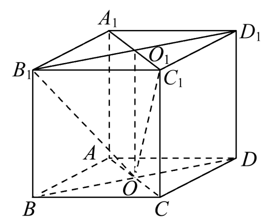
(1)证明：$PB/\!/$平面 AEC.

(2)设二面角 $D\text{-}AE\text{-}C$ 为 $60°$，$AP=1$，$AD=\sqrt{3}$，求三棱锥 $E\text{-}ACD$ 的体积.

押题 2　如图，四棱柱 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 的所有棱长都相等，$AC\cap BD=O$，$A_1C_1\cap B_1D_1=O_1$，四边形 ACC_1A_1 和四边形 BDD_1B_1 均为矩形.

(1)证明：$O_1O\perp$底面 $ABCD$.

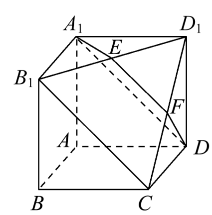
(2)若$\angle CBA=60°$，求二面角 $C_1\text{-}OB_1\text{-}D$ 的余弦值.



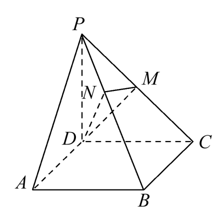
押题 3　如图所示，在多面体 $A_1B_1D_1DCBA$ 中，四边形 AA_1B_1B，ADD_1A_1，$ABCD$ 均为正方形，E 为 B_1D_1 的中点，过 A_1，D，E 的平面交 CD_1 于 F.

(1)证明：$EF/\!/B_1C$.

(2)求二面角 $E\text{-}A_1D\text{-}B_1$ 余弦值.



押题 4　如图所示，在四棱锥 $P\text{-}ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 是矩形，$PD\perp$平面 $ABCD$ 且 $PD=CD$，过 PC 的中点 M 作 $MN\perp PB$ 交 PB 于点 N，连接 DM，DN.



(1)证明：$DM\perp$平面 PBC.

(2)若平面 DMN 与平面 $ABCD$ 所成的二面角的余弦值为$\frac{2}{3}$，求$\frac{BC}{PD}$的值.

命题角度 2——统计概率

押题 1　若随机变量 η 的分布列如下：

η	-2	-1	0	1	2	3
P	0.1	0.2	0.2	0.3	0.1	0.1

则当 $P(\eta>x)=0.7$ 时，实数 x 的取值范围是　(　　)

A. $(-1,0]$　B. $[-1,0]$　C. $[-1,0)$　D. $(-1,0)$

押题 2　某校数学教研组为了解学生学习数学的情况，采用分层抽样的方法从高一 900 人、高二 n 人、高三 720 人中，抽取 40 人进行问卷调查. 已知高一被抽取的人数为 15，则 $n=$　(　　)

A. 660　B. 780　C. 790　D. 830

押题 3　做掷一个骰子的试验，事件 A 表示“小于 4 的奇数点出现”，事件 B 表示“小于 4 的点数出现”，则一次试验中，事件 $A+\overline{B}$ 发生的概率为　(　　)

A. $\frac{1}{3}$　B. $\frac{1}{2}$　C. $\frac{2}{3}$　D. $\frac{5}{6}$

◆ 押题 4　某班有 60 名学生,一次考试后数学成绩 $\xi(\xi\in\mathbf{N})$ 服从正态分布 $N(100,10^2)$,已知 $P(90\leqslant\xi\leqslant100)=0.3$,估计该班学生数学成绩在及格线以上的人数为________.

◆ 押题 5　将一颗骰子先后投掷两次分别得到点数 a,b,则直线 $ax+by=0$ 与圆 $(x-2)^2+y^2=2$ 有公共点的概率为________.

◆ 押题 6　一款砸金蛋游戏的规则如下:每盘游戏都需要砸三个金蛋,已知每次砸蛋出现金花的概率为 0.5,且各次砸蛋出现金花与否相互独立,则玩三盘游戏,至少有一盘出现金花的概率为________.

二、解答题

◆ 押题 1　某市有两家共享单车公司,在市场上分别投放了黄、蓝两种颜色的单车,已知黄、蓝两种颜色的单车的投放比例为 2∶1.监管部门为了了解两种颜色的单车的质量,决定从市场中随机地抽取 5 辆单车进行骑行体验,若每辆单车被抽取的可能性相同.

(1)求抽取的 5 辆单车中有 2 辆是蓝色单车的概率.

(2)在骑行体验过程中,发现蓝色单车存在一定质量问题,监管部门决定从市场中随机地抽取一辆送技术部门作进一步抽样检测,并规定若抽到的是蓝色单车,则抽样结束,若抽取的是黄色单车,则将其放回市场中,并继续从市场中随机地抽取下一辆单车,并规定抽样的次数最多不超过 $n(n\in\mathbf{N}^*)$ 次.在抽样结束时,已取到的黄色单车数以 ξ 表示,求 ξ 的分布列和数学期望.

◆ 押题 2　"扶贫帮困"是中华民族的传统美德,某校为帮扶困难同学,采用如下方式进行一次募捐:在不透明的箱子中放入大小均相同的白球七个,红球三个,每位献爱心的参与者投币 20 元有一次摸奖机会,一次性从箱中摸球三个(摸完球后将球放回),若有一个红球,奖金 10 元,两个红球奖金 20 元,三个全为红球奖金 100 元.

(1)求献爱心参与者中奖的概率.

(2)若该次募捐有 900 位献爱心参与者,求此次募捐所得善款的数学期望.

◆ 押题 3　某公司为了准确把握市场,做好产品计划,特对某产品做了市场调查:先销售该产品 50 天,统计发现每天的销售量 x 分布在 $[50,100)$ 内,且销售量 x 的分布频率

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{n}{10}-0.5,10n\leqslant x<10(n+1),n\text{ 为偶数},\\ \dfrac{n}{20}-a,10n\leqslant x<10(n+1),n\text{ 为奇数}.\end{cases}$$

(1)求 a 的值并估计销售量的平均数.

(2)若销售量大于等于 70,则称该日畅销,其余为滞销.在畅销日中用分层抽样的方法随机抽取 8 天,再从这 8 天中随机抽取 3 天进行统计,设这 3 天来自 X 个组,求随机变量 X 的分布列及数学期望(将频率视为概率).

◆ 押题 4　某市下派得力干部到某贫困村精准扶贫,为村子带去了 A,B 两种优良作物品种,为了解 A,B 两种产品的质量,从中分别随机抽取了 10 件样品,测量产品中微量元素的含量(单位:毫克),如图所示是测量数据的茎叶图.规定:当产品中的微量元素的含量不小于 18 毫克时,该产品为优等品.

甲产品		乙产品
9 6 3	0	
6 7 5 8	1	2 8 4 7 5 6
7 8 3	2	2 4 6 8

(1)试用样品数据估计甲、乙两种产品的优等品率.

(2)从乙产品抽取的 10 件样品中随机抽取 3 件,求抽到的 3 件样品中优等品数 ξ 的分布列及其数学期望 $E(\xi)$.

(3)从甲产品抽取的 10 件样品中有放回地随机抽取 3 件,也从乙产品抽取的 10 件样品中有放回地随机抽取 3 件;抽到的优等品中,记"甲产品恰比乙产品多 2 件"为事件 C,求事件 C 的概率.

命题角度 3——不等式选讲

◆ 押题 1　已知函数 $f(x)=|x-3|-|x+5|$.

(1)求不等式 $f(x)\geqslant2$ 的解集.

(2)设函数 $f(x)$ 的最大值为 M,若不等式 $x^2+2x+m\leqslant M$ 有解,求 m 的取值范围.

◆ 押题 2　已知函数 $f(x)=|x+1|+a|2x-1|$.

(1)当 $a=\dfrac{1}{2}$ 时,若 $f(x)\geqslant\dfrac{1}{m}+\dfrac{1}{n}(m,n>0)$ 对任意 $x\in\mathbf{R}$ 恒成立,求 $m+n$ 的最小值.

(2)若 $f(x)\geqslant|x-2|$ 的解集包含 $[-1,2]$,求实数 a 的取值范围.

◆ 押题 3　已知函数 $f(x)=|x|$.记 $g(x)=f(x)-2f(x-3)$.

(1)求不等式 $g(x)\geqslant-10$ 的解集.

(2)若对于任意实数 x 都有 $g(x)\leqslant m^2-2m$,求 m 的取值范围.

◆ 押题 4　已知函数 $f(x)=|x+2|+|x-b|$.

(1)当 $b=1$ 时,求不等式 $f(x)>5$ 的解集.

(2)若函数 $g(x)=\sqrt{f(x)-4}$ 的定义域为 $\mathbf{R}$,求实数 b 的取值范围.

答案解析

—— 数学学科 ——

· 命题角度 1——立体几何

押题 1.【解析】选 C.对于选项 A,若 $m/\!/\alpha,n/\!/\alpha$,则 m 与 n 可能相交、平行或异面,A 错误.对于 B 选项,m 与 n 也可能异面,B 错误,显然 C 选项正确,对于选项 D,若 $m/\!/\alpha,m\perp n$,则 $n/\!/\alpha$ 或 $n\subset\alpha$ 或 n 与 α 相交,故 D 错误.

押题 2.【解析】选 D.设三棱锥 $P\text{-}ABC$ 的外接球的半径为 R,在△APC 中,因为 $PA=2\sqrt{3},PC=2,\angle APC=\dfrac{\pi}{2}$,所以 $AC=\sqrt{PA^2+PC^2}=4$.在△ABC 中,因为 $AB=\sqrt{6},BC=\sqrt{10},AC=4$,所以 $BA^2+BC^2=AC^2$,所以 $\angle ABC=\dfrac{\pi}{2}$,所以 AC 为三棱锥 $P\text{-}ABC$ 的外接球的直径,所以 $R=2$,所以此三棱锥的外接球的表面积 $S=4\pi R^2=4\pi\times2^2=16\pi$.

押题 3.【解析】选 B.由三视图知几何体是一个以俯视图中的直角梯形为底面,高 $h=2$ cm 的四棱锥.

由三视图中的数据得四棱锥的底面面积 $S=\dfrac{1}{2}\times(2+4)\times2=6(\text{cm}^2)$,

所以其体积 $V=\dfrac{1}{3}Sh=\dfrac{1}{3}\times6\times2=4(\text{cm}^3)$.

押题 4.【解析】选 C.由三视图可知,该几何体是由半圆柱与三棱柱组成的,则该几何体的体积 $V=\dfrac{1}{2}\pi\times1^2\times3+\dfrac{1}{2}\times2\times2\times3=6+\dfrac{3}{2}\pi$.

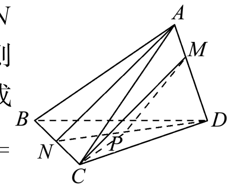
押题 5.【解析】由已知得:$CE=2,DE=2,CB=5,S_{\text{表面}}=S_{\text{圆台侧}}+S_{\text{圆台下底}}+S_{\text{圆锥侧}}=\pi(2+5)\times5+\pi\times25+\pi\times2\times2\sqrt{2}=(60+4\sqrt{2})\pi$,

$V=V_{\text{圆台}}-V_{\text{圆锥}}=\dfrac{1}{3}(\pi\cdot2^2+\pi\cdot5^2+\sqrt{2^2\cdot5^2\pi^2})\times4-\dfrac{1}{3}\pi\times2^2$

$\times 2=\frac{148}{3}\pi$.

答案：$(60+4\sqrt{2})\pi,\frac{148}{3}\pi$

押题 6.【解析】连接 DN，取 DN 靠近 N 点的三等分点 P，连接 PM,PC，则 $\angle PMC$ 即为异面直线 AN,CM 所成的角(或其补角)，易得 $PM=\frac{2}{3}AN=\sqrt{3}$，$CP=\sqrt{3}$，由余弦定理得 $CM=\sqrt{7}$，



所以 $\cos\angle PMC=\frac{3+7-3}{2\times\sqrt{3}\times\sqrt{7}}=\frac{\sqrt{21}}{6}$，即异面直线 AN，CM 所成角的余弦值为 $\frac{\sqrt{21}}{6}$.

答案：$\frac{\sqrt{21}}{6}$

二、解答题

押题 1.【解析】(1)设 AC 的中点为 G，连接 EG. 在三角形 PBD 中，中位线 $EG/\!/PB$，且 EG 在平面 AEC 上，所以 $PB/\!/$平面 AEC.

(2)设 $CD=m$，分别以 AD,AB,AP 为 x,y,z 轴建立坐标系，则 $A(0,0,0)$，$D(\sqrt{3},0,0)$，$E\left(\frac{\sqrt{3}}{2},0,\frac{1}{2}\right)$，$C(\sqrt{3},m,0)$.

所以 $\overrightarrow{AD}=(\sqrt{3},0,0)$，$\overrightarrow{AE}=\left(\frac{\sqrt{3}}{2},0,\frac{1}{2}\right)$，$\overrightarrow{AC}=(\sqrt{3},m,0)$.

设平面 ADE 的法向量 $\boldsymbol{n}_1=(x_1,y_1,z_1)$，则 $\boldsymbol{n}_1\cdot\overrightarrow{AD}=0$，$\boldsymbol{n}_1\cdot\overrightarrow{AE}=0$，解得一个 $\boldsymbol{n}_1=(0,1,0)$.

同理设平面 ACE 的法向量 $\boldsymbol{n}_2=(x_2,y_2,z_2)$，则 $\boldsymbol{n}_2\cdot\overrightarrow{AC}=0$，$\boldsymbol{n}_2\cdot\overrightarrow{AE}=0$，解得一个 $\boldsymbol{n}_2=(m,-\sqrt{3},-\sqrt{3}m)$.

因为 $\cos\frac{\pi}{3}=|\cos\langle\boldsymbol{n}_1,\boldsymbol{n}_2\rangle|=\frac{|\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}_2|}{|\boldsymbol{n}_1||\boldsymbol{n}_2|}=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{m^2+3+3m^2}}=\frac{1}{2}$，解得 $m=\frac{3}{2}$.

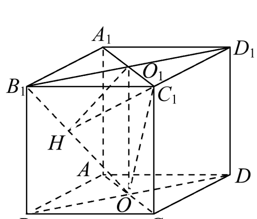
设 F 为 AD 的中点，则 $PA/\!/EF$，且 $EF=\frac{PA}{2}=\frac{1}{2}$，$EF\perp$面 ACD，即为三棱锥 E-ACD 的高. 所以 $V_{E-ACD}=\frac{1}{3}\cdot S_{\triangle ACD}\cdot EF=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times\frac{3}{2}\times\sqrt{3}\times\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{3}}{8}$. 所以，三棱锥 $E-ACD$ 的体积为 $\frac{\sqrt{3}}{8}$.

押题 2.【解析】(1)因为四边形 ACC_1A_1 和四边形 BDD_1B_1 均为矩形，所以 $CC_1\perp AC$，$DD_1\perp BD$，

又 $CC_1/\!/DD_1/\!/OO_1$，所以 $OO_1\perp AC$，$OO_1\perp BD$，因为 $AC\cap BD=O$，

所以 $O_1O\perp$底面 $ABCD$.

(2)方法一：如图，过 O_1 作 $O_1H\perp B_1O$，垂足为 H，连接 C_1H，



由(1)可得 $OO_1\perp A_1C_1$，由于 $A_1B_1C_1D_1$ 是菱形，所以 $B_1D_1\perp A_1C_1$，

又 $B_1D_1\cap OO_1=O_1$，所以 $A_1C_1\perp$平面 B_1D_1DB，

所以由三垂线定理得 $HC_1\perp B_1O$，所以 $\angle O_1HC_1$ 就是二面角 C_1-OB_1-D 的平面角.

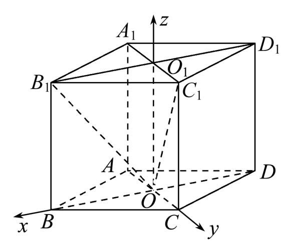
设棱柱的棱长为 2，因为 $\angle CBA=60^\circ$，所以 $OB=\sqrt{3}$，$OC=1$，$OB_1=\sqrt{7}$，

在直角三角形 O_1OB_1 中，$O_1H=\frac{OO_1\cdot B_1O_1}{B_1O}=\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$，

因为 $O_1C_1=1$，所以 $C_1H=\sqrt{O_1C_1^2+O_1H^2}=\sqrt{1+\frac{12}{7}}=\sqrt{\frac{19}{7}}$，

所以 $\cos\angle C_1HO_1=\frac{O_1H}{C_1H}=\frac{2\sqrt{57}}{19}$，即二面角 C_1-OB_1-D 的余弦值为 $\frac{2\sqrt{57}}{19}$.

方法二：因为四棱柱的所有棱长都相等，所以四边形 $ABCD$ 为菱形，$AC\perp BD$，又 $O_1O\perp$底面 $ABCD$，所以 OB,OC,OO_1 两两垂直. 如图以 O 为原点，OB,OC,OO_1 分别为 x,y,z 轴，建立空间直角坐标系.



设棱长为 2，因为 $\angle CBA=60^\circ$，所以 $OB=\sqrt{3}$，$OC=1$，

所以 $O(0,0,0)$，$B_1(\sqrt{3},0,2)$，$C_1(0,1,2)$，

平面 BDD_1B_1 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}=(0,1,0)$，

设平面 OC_1B_1 的一个法向量为 $\boldsymbol{m}=(x,y,z)$，

则由 $\boldsymbol{m}\perp\overrightarrow{OB_1}$，$\boldsymbol{m}\perp\overrightarrow{OC_1}$，得 $\sqrt{3}x+2z=0$，$y+2z=0$，

取 $z=-\sqrt{3}$，则 $x=2$，$y=2\sqrt{3}$，所以 $\boldsymbol{m}=(2,2\sqrt{3},-\sqrt{3})$，

所以 $\cos\langle\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}\rangle=\frac{\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{m}||\boldsymbol{n}|}=\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{19}}=\frac{2\sqrt{57}}{19}$.

由图形可知二面角 C_1-OB_1-D 的大小为锐角，

所以二面角 C_1-OB_1-D 的余弦值为 $\frac{2\sqrt{57}}{19}$.

押题 3.【解析】(1)因为 $A_1D/\!/B_1C$，$A_1D\subset$平面 A_1DE，$B_1C\not\subset$平面 A_1DE，所以 $B_1C/\!/$平面 A_1DE，又 $B_1C\subset$平面 B_1CD_1，平面 $A_1DE\cap$平面 $B_1CD_1=EF$，所以 $EF/\!/B_1C$.

(2)以 A 为原点，分别以 $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AA_1}$ 为 x 轴，y 轴，z 轴的单位正向量建立空间直角坐标系，则 $A(0,0,0)$，$B(1,0,0)$，$D(0,1,0)$，$A_1(0,0,1)$，$B_1(1,0,1)$，$D_1(0,1,1)$，而 E 是 B_1D_1 的中点，所以点 E 的坐标为 $(0.5,0.5,1)$. 设平面 A_1DE 的法向量 $\boldsymbol{n}_1=(r_1,s_1,t_1)$，又 $\overrightarrow{A_1E}=(0.5,0.5,0)$，$\overrightarrow{A_1D}=(0,1,-1)$，由 $\boldsymbol{n}_1\perp\overrightarrow{A_1E}$，$\boldsymbol{n}_1\perp\overrightarrow{A_1D}$ 得：$\begin{cases}0.5r_1+0.5s_1=0,\\ s_1-t_1=0,\end{cases}$ 令 $s_1=t_1=1$，则 $\boldsymbol{n}_1=(-1,1,1)$，

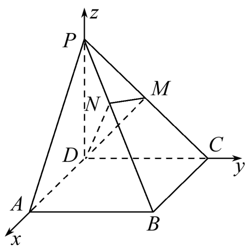
设平面 A_1B_1CD 的法向量 $\boldsymbol{n}_2=(r_2,s_2,t_2)$，又 $\overrightarrow{A_1B_1}=(1,0,0)$，$\overrightarrow{A_1D}=(0,1,-1)$，由同理可得：$\boldsymbol{n}_2=(0,1,1)$，

所以结合图形可得二面角 E-A_1D-B_1 的余弦值为 $\frac{|\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}_2|}{|\boldsymbol{n}_1|\cdot|\boldsymbol{n}_2|}=\frac{2}{\sqrt{3}\times\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{6}}{3}$.

押题 4.【解析】(1)以点 D 为坐标原点，分别以 DA,DC,DP

所在直线为 x,y,z 轴，建立空间直角坐标系，如图所示，设 $PD=DC=2$，$BC=t(t>0)$，则有

$D(0,0,0)$，$P(0,0,2)$，$B(t,2,0)$，$C(0,2,0)$，



所以 $\overrightarrow{PB}=(t,2,-2)$，

又因为点 M 是棱 PC 的中点，

所以 $M(0,1,1)$，$\overrightarrow{DM}=(0,1,1)$，

于是 $\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{DM}=0$，所以 $PB\perp DM$.

因为 $\overrightarrow{PC}=(0,2,-2)$，

所以 $\overrightarrow{DM}\cdot\overrightarrow{PC}=0$，所以 $DM\perp PC$，

又 $PB\cap PC=P$，

所以 $DM\perp$ 平面 PBC.

(2)由(1)知平面 $ABCD$ 的一个法向量为

$\overrightarrow{DP}=(0,0,2)$，

又因为 $PB\perp DM$，$MN\perp PB$，$DM\cap MN=M$，

所以 $PB\perp$ 平面 DMN，

所以 $\overrightarrow{PB}=(t,2,-2)$ 是平面 DMN 的一个法向量，

所以 $|\cos\langle\overrightarrow{DP},\overrightarrow{PB}\rangle|=\dfrac{|\overrightarrow{DP}\cdot\overrightarrow{PB}|}{|\overrightarrow{DP}||\overrightarrow{PB}|}=\dfrac{4}{2\sqrt{t^2+8}}=\dfrac{2}{\sqrt{t^2+8}}$

$=\dfrac{2}{3}$，所以 $t=1$，即 $\dfrac{BC}{PD}=\dfrac{BC}{CD}=\dfrac{1}{2}$，

所以当平面 DMN 与平面 $ABCD$ 所成的二面角的余弦值为 $\dfrac{2}{3}$ 时，$\dfrac{BC}{PD}=\dfrac{1}{2}$.

· 命题角度 2——统计概率

押题 1.【解析】选 C. 由题中给出的分布列，可读出相应的概率值，

因为 $P(\eta=0)+P(\eta=1)+P(\eta=2)+P(\eta=3)=0.7$，

所以 $-1\leqslant x<0$.

押题 2.【解析】选 B. 由已知条件，抽样比为 $\dfrac{15}{900}=\dfrac{1}{60}$，从而 $\dfrac{40}{900+n+720}=\dfrac{1}{60}$，解得 $n=780$.

押题 3.【解析】选 D. 掷一个骰子的试验有 6 种可能结果.

依题意 $P(A)=\dfrac{2}{6}=\dfrac{1}{3}$，$P(B)=\dfrac{3}{6}=\dfrac{1}{2}$，所以 $P(\overline{B})=1-P(B)=1-\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}$，

因为 $\overline{B}$ 表示“出现 4 点、5 点或 6 点”的事件，因此事件 A 与 $\overline{B}$ 互斥，

从而 $P(A+\overline{B})=P(A)+P(\overline{B})=\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{2}=\dfrac{5}{6}$.

押题 4.【解析】由题意，知 $P(\xi>110)=\dfrac{1-2P(90\leqslant\xi\leqslant100)}{2}$

$=0.2$，所以 $P(\xi>90)=0.2+0.3\times2=0.8$，

该班学生数学成绩在及格线以上的人数为 $60\times0.8=48$.

答案：48

押题 5.【解析】依题意，将一颗骰子先后投掷两次得到的点数所形成的数组 (a,b) 有 $(1,1)$，$(1,2)$，$(1,3)$，…，$(6,6)$，共 36 个，其中满足直线 $ax+by=0$ 与圆 $(x-2)^2+y^2=2$ 有公共点，即满足 $\dfrac{2a}{\sqrt{a^2+b^2}}\leqslant\sqrt{2}$，即 $a^2\leqslant b^2$ 的数组 (a,b) 有 $(1,1)$，$(1,2)$，$(1,3)$，$(1,4)$，…，$(6,6)$，共 $6+5+4+3+2+1=21$ 个，因此所求的概率等于 $\dfrac{21}{36}=\dfrac{7}{12}$.

答案：$\dfrac{7}{12}$

押题 6.【解析】砸蛋三次出现一次金花的概率为 $C_3^1\times\dfrac{1}{2}\times\left(1-\dfrac{1}{2}\right)^2=\dfrac{3}{8}$，出现两次金花的概率为 $C_3^2\times\left(\dfrac{1}{2}\right)^2\times\left(1-\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{3}{8}$，出现三次金花的概率为 $C_3^3\times\left(\dfrac{1}{2}\right)^3\times\left(1-\dfrac{1}{2}\right)^0=\dfrac{1}{8}$，则每盘游戏出现金花的概率为 $\dfrac{7}{8}$，所以玩三盘游戏，至少有一盘出现金花的概率 $P_1=1-C_3^0\left(\dfrac{7}{8}\right)^0\times\left(1-\dfrac{7}{8}\right)^3=\dfrac{511}{512}$.

答案：$\dfrac{511}{512}$

二、解答题

押题 1.【解析】(1)因为随机地抽取一辆单车是蓝色单车的概率为 $\dfrac{1}{3}$，用 X 表示“抽取的 5 辆单车中蓝色单车的辆数”，则 X 服从二项分布，即 $X\sim B\left(5,\dfrac{1}{3}\right)$，所以抽取的 5 辆单车中有 2 辆是蓝色单车的概率 $P=C_5^2\left(\dfrac{1}{3}\right)^2\left(\dfrac{2}{3}\right)^3=\dfrac{80}{243}$.

(2) ξ 的可能取值为：$0,1,2,\cdots,n$.

$P(\xi=0)=\dfrac{1}{3}$，$P(\xi=1)=\dfrac{2}{3}\times\dfrac{1}{3}=\dfrac{2}{9}$，

$P(\xi=2)=\left(\dfrac{2}{3}\right)^2\times\dfrac{1}{3}$，…，

$P(\xi=n-1)=\left(\dfrac{2}{3}\right)^{n-1}\cdot\dfrac{1}{3}$，$P(\xi=n)=\left(\dfrac{2}{3}\right)^n$.

所以 ξ 的分布列为：

ξ	0	1	2	……	$n-1$	n
P	$\dfrac{1}{3}$	$\dfrac{2}{3}\times\dfrac{1}{3}$	$\left(\dfrac{2}{3}\right)^2\times\dfrac{1}{3}$	……	$\left(\dfrac{2}{3}\right)^{n-1}\cdot\dfrac{1}{3}$	$\left(\dfrac{2}{3}\right)^n$

ξ 的数学期望为 $E(\xi)=0\times\dfrac{1}{3}+1\times\dfrac{2}{3}\times\dfrac{1}{3}+2\times\left(\dfrac{2}{3}\right)^2\times\dfrac{1}{3}+3\times\left(\dfrac{2}{3}\right)^3\times\dfrac{1}{3}+\cdots+(n-1)\cdot\left(\dfrac{2}{3}\right)^{n-1}\cdot\dfrac{1}{3}+n\cdot\left(\dfrac{2}{3}\right)^n$，①

$\dfrac{2}{3}E(\xi)=1\times\left(\dfrac{2}{3}\right)^2\times\dfrac{1}{3}+2\times\left(\dfrac{2}{3}\right)^3\times\dfrac{1}{3}+\cdots+(n-2)\cdot\left(\dfrac{2}{3}\right)^{n-1}\cdot\dfrac{1}{3}+(n-1)\cdot\left(\dfrac{2}{3}\right)^n\cdot\dfrac{1}{3}+n\cdot\left(\dfrac{2}{3}\right)^{n+1}$.②

①−②得：

$\dfrac{1}{3}E(\xi)=\dfrac{2}{3}\times\dfrac{1}{3}+\left(\dfrac{2}{3}\right)^2\times\dfrac{1}{3}+\left(\dfrac{2}{3}\right)^3\times\dfrac{1}{3}+\cdots+\left(\dfrac{2}{3}\right)^{n-1}\cdot\dfrac{1}{3}+\left[n\cdot\left(\dfrac{2}{3}\right)^n-(n-1)\cdot\left(\dfrac{2}{3}\right)^n\cdot\dfrac{1}{3}-n\cdot\left(\dfrac{2}{3}\right)^{n+1}\right]$，

所以 $\dfrac{1}{3}E(\xi)=\dfrac{2}{3}\times\dfrac{1}{3}+\left(\dfrac{2}{3}\right)^2\times\dfrac{1}{3}+\left(\dfrac{2}{3}\right)^3\times\dfrac{1}{3}+\cdots+\left(\dfrac{2}{3}\right)^{n-1}\cdot\dfrac{1}{3}+\left(\dfrac{2}{3}\right)^n\cdot\dfrac{1}{3}$，

所以 $E(\xi)=\frac{2}{3}+\left(\frac{2}{3}\right)^2+\left(\frac{2}{3}\right)^3+\cdots+\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}+\left(\frac{2}{3}\right)^n$

$=\frac{\frac{2}{3}\left[1-\left(\frac{2}{3}\right)^n\right]}{1-\frac{2}{3}}=2\left[1-\left(\frac{2}{3}\right)^n\right]$.

所以 $E(\xi)=2-2\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^n$.

押题 2.【解析】(1)设"献爱心参与者中奖"为事件 A,

则献爱心参与者中奖的概率 $P(A)=\frac{C_3^1C_7^2+C_3^2C_7^1+C_3^3}{C_{10}^3}=\frac{85}{120}=\frac{17}{24}$.

(2)设一个献爱心参与者参加活动,学校所得善款为 X,则 $X=20,10,0,-80$,

则 $P(X=20)=\frac{C_7^3}{C_{10}^3}=\frac{7}{24}$,$P(X=10)=\frac{C_3^1C_7^2}{C_{10}^3}=\frac{21}{40}$,

$P(X=0)=\frac{C_3^2C_7^1}{C_{10}^3}=\frac{7}{40}$,$P(X=-80)=\frac{C_3^3}{C_{10}^3}=\frac{1}{120}$,所以 X 的分布列为:

X	20	10	0	-80
P	$\frac{7}{24}$	$\frac{21}{40}$	$\frac{7}{40}$	$\frac{1}{120}$

学校所得善款的数学期望为 $E(X)=20\times\frac{7}{24}+10\times\frac{21}{40}+0\times\frac{7}{40}-80\times\frac{1}{120}=\frac{125}{12}$,

所以,此次募捐所得善款的数学期望为$\frac{125}{12}\times900=9\ 375$(元).

押题 3.【解析】(1)由题知$\begin{cases}10n\geqslant50,\\10(n+1)\leqslant100,\end{cases}$解得 $5\leqslant n\leqslant9$,n 可取 5,6,7,8,9,

代入 $f(x)=\begin{cases}\frac{n}{10}-0.5,10n\leqslant x<10(n+1),n\text{ 为偶数},\\\frac{n}{20}-a,10n\leqslant x<10(n+1),n\text{ 为奇数}\end{cases}$

中,得 $\left(\frac{6}{10}-0.5\right)+\left(\frac{8}{10}-0.5\right)+\left(\frac{5}{20}-a\right)+\left(\frac{7}{20}-a\right)+\left(\frac{9}{20}-a\right)=1$,$a=0.15$.

销售量在[50,60),[60,70),[70,80),[80,90),[90,100)内的频率分别是 0.1,0.1,0.2,0.3,0.3,

销售量的平均数为 $55\times0.1+65\times0.1+75\times0.2+85\times0.3+95\times0.3=81$.

(2)销售量在[70,80),[80,90),[90,100)内的频率之比为 2∶3∶3,所以各组抽取的天数分别为 2,3,3.

X 的所有可能值为 1,2,3,

$P(X=1)=\frac{2}{C_8^3}=\frac{2}{56}=\frac{1}{28}$,$P(X=3)=\frac{2\times3\times3}{C_8^3}=\frac{18}{56}=\frac{9}{28}$,

$P(X=2)=1-\frac{1}{28}-\frac{9}{28}=\frac{9}{14}$.

X 的分布列为:

X	1	2	3
P	$\frac{1}{28}$	$\frac{9}{14}$	$\frac{9}{28}$

数学期望为 $E(X)=1\times\frac{1}{28}+2\times\frac{9}{14}+3\times\frac{9}{28}=\frac{16}{7}$.

押题 4.【解析】(1)从甲产品抽取的 10 件样品中优等品有 4 件,优等品率为$\frac{4}{10}=\frac{2}{5}$,

从乙产品抽取的 10 件样品中优等品有 5 件,优等品率为 $\frac{5}{10}=\frac{1}{2}$

故甲、乙两种产品的优等品率分别为$\frac{2}{5}$,$\frac{1}{2}$.

(2)ξ 的所有可能取值为 0,1,2,3.

$P(\xi=0)=\frac{C_5^3}{C_{10}^3}=\frac{1}{12}$,$P(\xi=1)=\frac{C_5^1C_5^2}{C_{10}^3}=\frac{5}{12}$,

$P(\xi=2)=\frac{C_5^2C_5^1}{C_{10}^3}=\frac{5}{12}$,$P(\xi=3)=\frac{C_5^3}{C_{10}^3}=\frac{1}{12}$,

所以 ξ 的分布列为

ξ	0	1	2	3
P	$\frac{1}{12}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{1}{12}$

$E(\xi)=0\times\frac{1}{12}+1\times\frac{5}{12}+2\times\frac{5}{12}+3\times\frac{1}{12}=\frac{3}{2}$.

(3)抽到的优等品中,甲产品恰比乙产品多 2 件包括两种情况:"抽到的优等品数甲产品 2 件且乙产品 0 件","抽到的优等品数甲产品 3 件且乙产品 1 件",分别记为事件 A,B,$P(A)=C_3^2\left(\frac{2}{5}\right)^2\left(1-\frac{2}{5}\right)\times C_3^0\left(\frac{1}{2}\right)^0\left(1-\frac{1}{2}\right)^3=\frac{9}{250}$,

$P(B)=C_3^3\left(\frac{2}{5}\right)^3\times C_3^1\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{3}{125}$,

故抽到的优等品中甲产品恰比乙产品多 2 件的概率为

$P(C)=P(A)+P(B)=\frac{9}{250}+\frac{3}{125}=\frac{3}{50}$.

· 命题角度 3——不等式选讲

押题 1.【解析】(1)当 $x\geqslant3$ 时,$f(x)=-8$,此时 $f(x)\geqslant2$ 无解;

当 $-5<x<3$ 时,$f(x)=-2x-2$,由 $f(x)\geqslant2$,解得 $-5<x\leqslant-2$;

当 $x\leqslant-5$ 时,$f(x)=8$,此时 $f(x)\geqslant2$ 恒成立.

综上,不等式 $f(x)\geqslant2$ 的解集是$\{x|x\leqslant-2\}$.

(2)由(1)可知 $f(x)=\begin{cases}-8,x\geqslant3,\\-2x-2,-5<x<3,\\8,x\leqslant-5,\end{cases}$

易知函数 $f(x)$的最大值 $M=8$,

若 $x^2+2x+m\leqslant8$ 有解,得 $m\leqslant-x^2-2x+8$ 有解,

即 $m\leqslant[-(x+1)^2+9]_{\max}=9$.

因此,m 的取值范围是 $m\leqslant9$.

押题 2.【解析】(1)当 $a=\frac{1}{2}$时,$f(x)=|x+1|+\frac{1}{2}|2x-1|$

$=|x+1|+\left|x-\frac{1}{2}\right|\geqslant\frac{3}{2}$,

所以 $f(x)_{\min}=\frac{3}{2}$,所以$\frac{1}{m}+\frac{1}{n}\leqslant\frac{3}{2}$.所以$\frac{m+n}{mn}\leqslant\frac{3}{2}$,

所以 $m+n\leqslant\frac{3}{2}mn\leqslant\frac{3}{2}\left(\frac{m+n}{2}\right)^2$,

当且仅当 $m=n$ 时等号成立,

因为 $m,n>0$,解得 $m+n\geqslant\frac{8}{3}$,

当且仅当 $m=n$ 时等号成立,

故 $m+n$ 的最小值为$\frac{8}{3}$.

(2)因为 $f(x)\geqslant|x-2|$的解集包含$[-1,2]$,

当 $x\in[-1,2]$时，有 $x+1+a|2x-1|\geqslant 2-x$，

所以 $a|2x-1|\geqslant 1-2x$ 对 $x\in[-1,2]$恒成立，

当$-1\leqslant x<\frac{1}{2}$时，$a(1-2x)\geqslant 1-2x$，所以 $a\geqslant 1$；

当$\frac{1}{2}\leqslant x\leqslant 2$ 时，$a(2x-1)\geqslant 1-2x$，所以 $a\geqslant -1$.

综上：$a\geqslant 1$.

故实数 a 的取值范围是$[1,+\infty)$.

押题 **3.【解析】**(1) $g(x)=|x|-2|x-3|=\begin{cases}x-6, x\leqslant 0,\\ 3x-6, 0<x<3,\\ -x+6, x\geqslant 3.\end{cases}$

当 $x\leqslant 0$ 时，$x-6\geqslant -10$，所以$-4\leqslant x\leqslant 0$；

当 $0<x<3$ 时，$3x-6\geqslant -10$，所以 $0<x<3$；

当 $x\geqslant 3$ 时，$-x+6\geqslant -10$，得 $3\leqslant x\leqslant 16$.

所以不等式 $g(x)\geqslant -10$ 的解集为$[-4,16]$.

(2)由(1)可得 $g(x)$的最大值为 $g(3)=3$，

因为对于任意实数 x 都有 $g(x)\leqslant m^2-2m$，

所以 $3\leqslant m^2-2m$，

解得，$m\leqslant -1$ 或 $m\geqslant 3$.

押题 **4.【解析】**(1)当 $b=1$ 时，不等式为$|x+2|+|x-1|>5$，

等价于$\begin{cases}x\leqslant -2,\\ -x-2-x+1>5\end{cases}$或$\begin{cases}-2<x\leqslant 1,\\ x+2-x+1>5\end{cases}$

或$\begin{cases}x\geqslant 1,\\ x+2+x-1>5,\end{cases}$

解得 $x<-3$ 或 $x>2$.

所以 $f(x)>5$ 的解集为$\{x|x<-3$ 或 $x>2\}$.

(2)根据题意，不等式$|x+2|+|x-b|-4\geqslant 0$ 恒成立，所以$(|x+2|+|x-b|-4)_{\min}\geqslant 0$.

又$|x+2|+|x-b|-4\geqslant|b+2|-4$，

所以$|b+2|-4\geqslant 0\Rightarrow b\leqslant -6$ 或 $b\geqslant 2$.