\ 数学学科 /

命题角度 1——解析几何

一、选择、填空

押题 1　已知 $P(x,y)$ 是直线 $kx+y+4=0(k>0)$ 上一动点，PA 是圆 $C:x^2+y^2-2y=0$ 的一条切线，A 是切点，若线段 PA 长度的最小值为 2，则 k 的值为　(　　)

A. 3　　B. $\frac{\sqrt{21}}{2}$　　C. $2\sqrt{2}$　　D. 2

押题 2　以抛物线 C 的顶点为圆心的圆交 C 于 A,B 两点，交 C 的准线于 D,E 两点. 已知 $|AB|=4\sqrt{2}$，$|DE|=2\sqrt{5}$，则 C 的焦点到准线的距离为　(　　)

A. 2　　B. 4　　C. 6　　D. 8

押题 3　设直线 l 过双曲线 C 的一个焦点，且与 C 的一条对称轴垂直，l 与 C 交于 A,B 两点，$|AB|$ 为 C 的实轴长的 2 倍，则 C 的离心率为　(　　)

A. $\sqrt{2}$　　B. $\sqrt{3}$　　C. 2　　D. 3

押题 4　在平面直角坐标系 xOy 中，P 是椭圆 $\frac{y^2}{4}+\frac{x^2}{3}=1$ 上的一个动点，点 $A(1,1)$，$B(0,-1)$，则 $|PA|+|PB|$ 的最大值为　(　　)

A. 5　　B. 4　　C. 3　　D. 2

押题 5　一个圆经过椭圆 $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}=1$ 的三个顶点，且圆心在 x 轴的正半轴上，则该圆的标准方程为________.

押题 6　已知双曲线 $x^2-\frac{y^2}{3}=1$ 上存在两点 M,N 关于直线 $y=x+m$ 对称，且 MN 的中点在抛物线 $y^2=18x$ 上，则实数 m 的值为________.

二、解答

押题 1　已知椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$，右顶点 A 是抛物线 $y^2=8x$ 的焦点，直线 $l:y=k(x-1)$ 与椭圆 C 相交于 P,Q 两点.

(1)求椭圆 C 的方程.

(2)如果 $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{AQ}$，点 M 关于直线 l 的对称点 N 在 y 轴上，求 k 的值.

押题 2　对于椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$，有如下性质：若点 (x_0,y_0) 是椭圆上的点，则椭圆在该点处的切线方程为 $\frac{x_0x}{a^2}+\frac{y_0y}{b^2}=1$. 利用此结论解答下列问题. 点 $Q\left(1,\frac{3}{2}\right)$ 是椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 上的点，并且椭圆在点 Q 处的切线斜率为 $-\frac{1}{2}$.

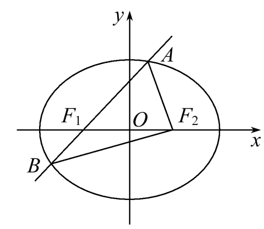
(1)求椭圆 C 的标准方程.

(2)若动点 P 在直线 $x+y=3$ 上，经过点 P 的直线 m,n 与椭圆 C 相切，切点分别为点 M,N. 求证：直线 MN 必经过一定点.

押题 3　如图，椭圆 $E:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左焦点为 F_1，右焦点为 F_2，离心率 $e=\frac{1}{2}$，过 F_1 的直线交椭圆于 A,B 两点，且 $\triangle ABF_2$ 的周长为 8.

(1)求椭圆 E 的方程.

(2)设动直线 l，$y=kx+m$ 与椭圆有且只有一个公共点 P，且与直线 $x=4$ 相交于点 Q. 试探究在坐标平面内是否存在定点 M，使得以 PQ 为直径的圆恒过点 M？若存在，求出点 M 的坐标，若不存在，说明理由.



押题 4　已知直线 $l:y=kx+m$ 与椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 相交于 A,P 两点，与 x 轴，y 轴分别交于点 N 和点 M，且 $PM=MN$，点 Q 是点 P 关于 x 轴的对称点，QM 的延长线交椭圆于点 B，过点 A,B 分别作 x 轴的垂线，垂足分别为 A_1,B_1. 若椭圆 C 的左、右焦点与其短轴的一个端点是正三角形的三个顶点，点 $D\left(1,\frac{3}{2}\right)$ 在椭圆 C 上.

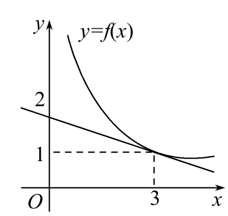
(1)求椭圆 C 的方程.

(2)过右焦点 F_2 作斜率为 k 的直线 l 与椭圆 C 交于 M,N 两点，在 x 轴上是否存在点 $P(m,0)$，使得以 PM,PN 为邻边的平行四边形是菱形？如果存在，求出 m 的取值范围；如果不存在，请说明理由.

命题角度 2——函数与导数

一、选择、填空

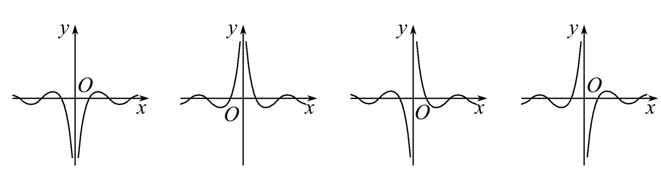
押题 1　如图，$y=f(x)$ 是可导函数，直线 $l:y=kx+2$ 是曲线 $y=f(x)$ 在 $x=3$ 处的切线，令 $g(x)=xf(x)$，$g'(x)$ 是 $g(x)$ 的导函数，则 $g'(3)=$　(　　)



A. -1　　B. 0

C. 2　　D. 4

押题 2　函数 $f(x)=\frac{2^x+1}{2^x-1}\cdot\cos x$ 的图象大致是　(　　)



A　　B　　C　　D

押题 3　已知函数 $f(x)=e^x-a(2x+1)$ 在 $(0,+\infty)$ 上有两个零点，则实数 a 的取值范围是　(　　)

A. $\left(\frac{\sqrt{e}}{2},+\infty\right)$　　B. $\left(\frac{\sqrt{e}}{2},1\right)$

C. $\left[\frac{\sqrt{e}}{2},1\right]$　　D. $(1,+\infty)$

押题 4　方程 $\log_{\frac{1}{3}}(a-3^x)=2+x$ 有解，则 a 的最小值为________.

押题 5　已知函数 $g(x)$ 为奇函数，$f(x)-g(x)=4$，若 $f(x)$ 的最大值为 M，最小值为 m，则 $M+m$ 等于________.

押题 6　已知函数 $f(x)=kx-x\ln x$. 若 $f(x)<x+2k$ 对任意 $x>2$ 恒成立，则整数 k 的最大值为________.

二、解答

◈ **押题 1** 设函数 $f(x)=xe^{a-x}+bx$,曲线 $y=f(x)$在点$(2,f(2))$处的切线方程为 $y=(e-1)x+4$.

(1)求 a,b 的值.

(2)求 $f(x)$的单调区间.

◈ **押题 2** 已知函数 $f(x)=e^x-ax(a\in\mathbf{R}$,e 为自然对数的底数).

(1)讨论函数 $f(x)$的单调性.

(2)若 $a=1$,函数 $g(x)=(x-m)f(x)-e^x+x^2+x$ 在$(2,+\infty)$上为增函数,求实数 m 的取值范围.

◈ **押题 3** 已知 $f'(x)$为函数 $f(x)$的导函数,$f(x)=e^{2x}+2f(0)e^x-f'(0)x$.

(1)求 $f(x)$的单调区间.

(2)当 $x>0$ 时,$af(x)<e^x-x$ 恒成立,求 a 的取值范围.

◈ **押题 4** 设函数 $f(x)=x^2-a\ln x$,$g(x)=(a-2)x$.

(1)求函数 $f(x)$的单调区间.

(2)若函数 $F(x)=f(x)-g(x)$有两个零点 x_1,x_2,求满足条件的最小正整数 a 的值.

答案解析

—— 数学学科 ——

· 命题角度 1——解析几何

一、选择、填空

押题 1.【解析】选 D. 圆 $C:x^2+(y-1)^2=1$,圆心 $C(0,1)$,半径 $r=1$,圆心到直线的最小距离 $d=\frac{5}{\sqrt{k^2+1}}=\sqrt{2^2+1^2}$,

解得 $k=2$ 或 $k=-2$(舍去).

押题 2.【解析】选 B. 不妨设抛物线 $C:y^2=2px(p>0)$,圆的方程为 $x^2+y^2=r^2(r>0)$,

因为$|AB|=4\sqrt{2}$,$|DE|=2\sqrt{5}$,抛物线的准线方程为 $x=-\frac{p}{2}$,

所以不妨设 $A\left(\frac{4}{p},2\sqrt{2}\right)$,$D\left(-\frac{p}{2},\sqrt{5}\right)$,

因为点 $A\left(\frac{4}{p},2\sqrt{2}\right)$,$D\left(-\frac{p}{2},\sqrt{5}\right)$在圆 $x^2+y^2=r^2$ 上,

所以$\frac{16}{p^2}+8=\frac{p^2}{4}+5$,解得 $p=4$(负值舍去),

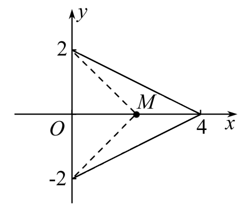
故 C 的焦点到准线的距离为 4.

押题 3.【解析】选 B. 设双曲线 C 的方程为$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$,焦点 $F(-c,0)$,将 $x=-c$ 代入$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 可得 $y^2=\frac{b^4}{a^2}$,所以 $|AB|=2\times\frac{b^2}{a}=2\times2a$,所以 $b^2=2a^2$,$c^2=a^2+b^2=3a^2$,所以 $e=\frac{c}{a}=\sqrt{3}$.

押题 4.【解析】选 A. 因为椭圆方程为$\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{4}=1$,所以焦点为 $B(0,-1)$和 $B'(0,1)$,连接 PB',AB',根据椭圆的定义,得$|PB|+|PB'|=2a=4$,可得$|PB|=4-|PB'|$,因此$|PA|+|PB|=|PA|+(4-|PB'|)=4+(|PA|-|PB'|)$. 因为$|PA|-|PB'|\leqslant|AB'|$,所以$|PA|+|PB|\leqslant4+|AB'|=4+1=5$,当且仅当 P 在 AB'延长线上时,等号成立. 故$|PA|+|PB|$的最大值为 5.

押题 5.【解析】方法一:由已知得该圆经过椭圆的三个顶点 $A(4,0)$、$B(0,2)$、$C(0,-2)$. 易知线段 AB 的垂直平分线的方程为 $2x-y-3=0$. 令 $y=0$,得 $x=\frac{3}{2}$,所以圆心坐标为$\left(\frac{3}{2},0\right)$,则半径 $r=4-\frac{3}{2}=\frac{5}{2}$. 故该圆的标准方程为$\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+y^2=\frac{25}{4}$.

方法二:如图,设圆心 $M(a,0)$,



则 $r^2=2^2+a^2=(4-a)^2$,所以 $a=\frac{3}{2}$,所以 $r=4-\frac{3}{2}=\frac{5}{2}$,

所以圆的方程为$\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+y^2=\frac{25}{4}$.

答案:$\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+y^2=\frac{25}{4}$

押题 6.【解析】设 $M(x_1,y_1)$,$N(x_2,y_2)$,MN 的中点 $P(x_0,y_0)$,

则$\begin{cases}x_1^2-\frac{y_1^2}{3}=1, & ①\\ x_2^2-\frac{y_2^2}{3}=1, & ②\\ x_1+x_2=2x_0, & ③\\ y_1+y_2=2y_0, & ④\end{cases}$

由②-①得$(x_2-x_1)(x_2+x_1)=\frac{1}{3}(y_2-y_1)(y_2+y_1)$,显然 $x_1\neq x_2$.

所以$\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\cdot\frac{y_2+y_1}{x_2+x_1}=3$,即 $k_{MN}\cdot\frac{y_0}{x_0}=3$.

因为 M,N 关于直线 $y=x+m$ 对称,

所以 $k_{MN}=-1$,所以 $y_0=-3x_0$. 又因为 $y_0=x_0+m$,

所以 $P\left(-\frac{m}{4},\frac{3m}{4}\right)$,代入抛物线方程,得

$\frac{9}{16}m^2=18\cdot\left(-\frac{m}{4}\right)$.

解得 $m=0$ 或-8,经检验都符合.

答案:0 或-8

二、解答

押题 1.【解析】(1)由抛物线 $y^2=8x$,可得其焦点坐标为$(2,0)$,

即点 $A(2,0)$,所以 $a=2$.

又因为 $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{3}}{2}$,所以 $c=\sqrt{3}$,所以 $b^2=a^2-c^2=1$,

所以椭圆 C 的方程为$\frac{x^2}{4}+y^2=1$.

(2)设点 $P(x_1,y_1)$,点 $Q(x_2,y_2)$,又因为点 $A(2,0)$,

可得 $\overrightarrow{AP}=(x_1-2,y_1)$,$\overrightarrow{AQ}=(x_2-2,y_2)$,

所以 $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{AQ}=(x_1+x_2-4,y_1+y_2)$,

所以点 $M(x_1+x_2-2,y_1+y_2)$.

由$\begin{cases}\frac{x^2}{4}+y^2=1,\\ y=k(x-1),\end{cases}$ 得$(4k^2+1)x^2-8k^2x+4k^2-4=0$(判别式 $\Delta>0$),

则 $x_1+x_2-2=\frac{8k^2}{4k^2+1}-2=\frac{-2}{4k^2+1}$,$y_1+y_2=k(x_1+x_2-$

$2)=\dfrac{-2k}{4k^2+1}$，

即点 $M\left(\dfrac{-2}{4k^2+1},\dfrac{-2k}{4k^2+1}\right)$.

设点 $N(0,y_3)$，则线段 MN 的中点坐标为 $\left(\dfrac{-1}{4k^2+1},\dfrac{-k}{4k^2+1}+\dfrac{y_3}{2}\right)$.

因为点 M,N 关于直线 l 对称，所以线段 MN 的中点在直线 l 上，

所以 $\dfrac{-k}{4k^2+1}+\dfrac{y_3}{2}=k\left(\dfrac{-1}{4k^2+1}-1\right)$，

解得 $y_3=-2k$，即点 $N(0,-2k)$.

由于点 M,N 关于直线 l 对称，所以点 M,N 所在直线与直线 l 垂直，

所以 $\dfrac{\dfrac{-2k}{4k^2+1}-(-2k)}{\dfrac{-2}{4k^2+1}-0}\cdot k=-1$，解得 $k=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

押题 2.【解析】(1)因为椭圆 C 在点 Q 处的切线方程为 $\dfrac{x}{a^2}+\dfrac{3y}{2b^2}=1$，

其斜率为 $-\dfrac{2b^2}{3a^2}=-\dfrac{1}{2}$，所以 $3a^2=4b^2$.

又因为点 Q 在椭圆上，

所以 $\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{9}{4b^2}=1$.

解得 $a^2=4,b^2=3$.

所以椭圆 C 的方程为 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$.

(2)设点 $P(x_0,y_0)$，点 $M(x_1,y_1)$，点 $N(x_2,y_2)$，

则切线 $m:\dfrac{x_1x}{4}+\dfrac{y_1y}{3}=1$，切线 $n:\dfrac{x_2x}{4}+\dfrac{y_2y}{3}=1$.

因为 m,n 都经过点 P，

所以 $\dfrac{x_1x_0}{4}+\dfrac{y_1y_0}{3}=1,\dfrac{x_2x_0}{4}+\dfrac{y_2y_0}{3}=1$.

即直线 MN 的方程为 $\dfrac{x_0x}{4}+\dfrac{y_0y}{3}=1$，

又因为 $x_0+y_0=3$，

所以 $\dfrac{x_0x}{4}+\dfrac{(3-x_0)y}{3}=1$，

即 $(3x-4y)x_0+12y-12=0$.

令 $\begin{cases}3x-4y=0,\\12y-12=0,\end{cases}$ 得 $\begin{cases}x=\dfrac{4}{3},\\y=1,\end{cases}$ 所以直线 MN 必经过一定点 $\left(\dfrac{4}{3},1\right)$.

押题 3.【解析】(1)因为 $|AB|+|AF_2|+|BF_2|=8$.

即 $|AF_1|+|F_1B|+|AF_2|+|BF_2|=8$，

又 $|AF_1|+|AF_2|=|BF_1|+|BF_2|=2a$，

所以 $4a=8,a=2$.

又因为 $e=\dfrac{1}{2}$，即 $\dfrac{c}{a}=\dfrac{1}{2}$，所以 $c=1$，所以 $b=\sqrt{a^2-c^2}=\sqrt{3}$，

所以椭圆 E 的方程为 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$.

(2)由 $\begin{cases}y=kx+m\\\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1\end{cases}\Rightarrow(3+4k^2)x^2+8mkx+4m^2-12=0$，

$\Delta=64m^2k^2-16(m^2-3)(3+4k^2)=0\Rightarrow m^2=3+4k^2$.

$\begin{cases}x_1=\dfrac{-4mk}{3+4k^2}\\y_1=\dfrac{3m}{3+4k^2}\end{cases}\Rightarrow P\left(\dfrac{-4mk}{3+4k^2},\dfrac{3m}{3+4k^2}\right)$，设 $Q(4,4k+m)$ 由对称性知，若点 M 存在，则必在 x 轴上，不妨设为 $(t,0)$，$\overrightarrow{MP}=\left(\dfrac{-4mk}{3+4k^2}-t,\dfrac{3m}{3+4k^2}\right)$，$\overrightarrow{MQ}=(4-t,4k+m)$，

又 $3+4k^2=m^2$，所以 $\overrightarrow{MP}=\left(-\dfrac{4k}{m}-t,\dfrac{3}{m}\right)$，$\overrightarrow{MQ}=(4-t,4k+m)$，

$\overrightarrow{MP}\cdot\overrightarrow{MQ}=\left(-\dfrac{4k}{m}-t\right)(4-t)+\dfrac{3}{m}(4k+m)$

$=\left(\dfrac{4k}{m}+t\right)(t-4)+\dfrac{3}{m}(4k+m)$

$=\dfrac{4kt}{m}-\dfrac{16k}{m}+t^2-4t+\dfrac{12k}{m}+3$

$=\dfrac{4kt}{m}-\dfrac{4k}{m}+t^2-4t+3$

$=4(t-1)\dfrac{k}{m}+(t^2-4t+3)=0$

$\Rightarrow\begin{cases}t-1=0\\t^2-4t+3=0\end{cases}\Rightarrow t=1$ 故存在 $M(1,0)$ 满足题意.

押题 4.【解析】(1)由题意得 $\begin{cases}b=\sqrt{3}c,\\\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{9}{4b^2}=1,\\a^2=b^2+c^2,\end{cases}$ 所以 $\begin{cases}b^2=3,\\a^2=4,\end{cases}$

所以椭圆 C 的方程为 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$.

(2)由(1)知 $F_2(1,0)$，$l:y=k(x-1)$，联立 $\begin{cases}y=k(x-1),\\\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1,\end{cases}$

化简得 $(3+4k^2)x^2-8k^2x+4k^2-12=0$，

设 $M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$，则 $x_1+x_2=\dfrac{8k^2}{3+4k^2}$，$y_1+y_2=k(x_1+x_2-2)$，

$\overrightarrow{PM}+\overrightarrow{PN}=(x_1-m,y_1)+(x_2-m,y_2)=(x_1+x_2-2m,y_1+y_2)$，

由于菱形对角线互相垂直，则 $(\overrightarrow{PM}+\overrightarrow{PN})\cdot\overrightarrow{MN}=0$，

因为直线 MN 的方向向量是 $(1,k)$，

故 $k(y_1+y_2)+x_1+x_2-2m=0$，则 $k^2(x_1+x_2-2)+x_1+x_2-2m=0$，

即 $k^2\left(\dfrac{8k^2}{3+4k^2}-2\right)+\dfrac{8k^2}{3+4k^2}-2m=0$.

由已知条件知 $k\neq0$ 且 $k\in\mathbf{R}$，

所以 $m=\dfrac{k^2}{3+4k^2}=\dfrac{1}{\dfrac{3}{k^2}+4}$，所以 $0<m<\dfrac{1}{4}$，

故存在满足题意的点 P，且 m 的取值范围是 $\left(0,\dfrac{1}{4}\right)$.

· 命题角度 2——函数与导数

一、选择、填空

押题 1.【解析】选 B. 由题图可知曲线 $y=f(x)$ 在 $x=3$ 处的切线的斜率为 $-\dfrac{1}{3}$，即 $f'(3)=-\dfrac{1}{3}$，

又 $g(x)=xf(x)$，$g'(x)=f(x)+xf'(x)$，$g'(3)=f(3)+3f'(3)$，

由题图可知 $f(3)=1$，所以 $g'(3)=1+3\times\left(-\dfrac{1}{3}\right)=0$.

押题 2.【解析】选 C. 由 $f(-x)=\frac{2^{-x}+1}{2^{-x}-1}\cdot\cos(-x)=-\frac{2^x+1}{2^x-1}\cdot\cos x=-f(x)$,可知函数 $f(x)$ 为奇函数,图象关于原点对称,排除 A,B;当 $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$时,$f(x)>0$,所以排除 D.

押题 3.【解析】选 B. 函数 $f(x)=e^x-a(2x+1)$ 在 $(0,+\infty)$上有两个零点,即方程 $a=\frac{e^x}{2x+1}$有两个正根.

令 $g(x)=\frac{e^x}{2x+1}$,$g'(x)=\frac{e^x(2x-1)}{(2x+1)^2}$,

当 $0<x<\frac{1}{2}$时,$g'(x)<0$,当 $x>\frac{1}{2}$时,$g'(x)>0$,

所以 $g(x)$在$\left(0,\frac{1}{2}\right)$上是减函数,在$\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$上是增函数.

$g(x)_{\min}=g\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{\sqrt{e}}{2}$,又 $g(0)=1$,

所以 a 的取值范围是$\left(\frac{\sqrt{e}}{2},1\right)$.

押题 4.【解析】若方程 $\log_{\frac{1}{3}}(a-3^x)=2+x$ 有解,则$\left(\frac{1}{3}\right)^{2+x}=a-3^x$ 有解,即$\frac{1}{9}\left(\frac{1}{3}\right)^x+3^x=a$ 有解,因为$\frac{1}{9}\left(\frac{1}{3}\right)^x+3^x\geqslant\frac{2}{3}$,故 a 的最小值为$\frac{2}{3}$.

答案:$\frac{2}{3}$

押题 5.【解析】$f(x)=g(x)+4$,因为 $g(x)$为奇函数,最大值与最小值互为相反数,因此 $M+m=8$.

答案:8

押题 6.【解析】由已知得 $k<\frac{x+x\ln x}{x-2}$在$(2,+\infty)$上恒成立,

令 $g(x)=\frac{x+x\ln x}{x-2}(x>2)$,则 $g'(x)=\frac{-2\ln x+x-4}{(x-2)^2}$,

令 $h(x)=-2\ln x+x-4(x>2)$,则 $h'(x)=\frac{x-2}{x}>0$.

所以 $h(x)$在$(2,+\infty)$上是增函数.

又 $h(8)=4-2\ln 8<0$,$h(9)=5-2\ln 9>0$,

所以存在 $x_0\in(8,9)$,使 $h(x_0)=0$,

当 $2<x<x_0$ 时,$h(x)<0$,$g'(x)<0$,

当 $x>x_0$ 时,$h(x)>0$,$g'(x)>0$.

所以 $g(x)$在$(2,x_0)$上是减函数,在$(x_0,+\infty)$上是增函数.

又 $h(x_0)=-2\ln x_0+x_0-4=0$,所以 $g(x)_{\min}=g(x_0)=\frac{x_0+x_0\ln x_0}{x_0-2}=\frac{1}{2}x_0\in\left(4,\frac{9}{2}\right)$,

所以 $k\leqslant4$,即整数 k 的最大值为 4.

答案:4

二、解答

押题 1.【解析】(1)因为 $f(x)=xe^{a-x}+bx$,所以 $f'(x)=(1-x)e^{a-x}+b$.

依题设,得$\begin{cases}f(2)=2e+2,\\f'(2)=e-1,\end{cases}$即$\begin{cases}2e^{a-2}+2b=2e+2,\\-e^{a-2}+b=e-1,\end{cases}$

解得 $a=2$,$b=e$.

(2)由(1)知 $f(x)=xe^{2-x}+ex$.

由 $f'(x)=e^{2-x}(1-x+e^{x-1})$及 $e^{2-x}>0$ 知,

$f'(x)$与 $1-x+e^{x-1}$同号.

令 $g(x)=1-x+e^{x-1}$,则 $g'(x)=-1+e^{x-1}$.

所以,当 $x\in(-\infty,1)$时,$g'(x)<0$,$g(x)$在区间$(-\infty,1)$上单调递减;当 $x\in(1,+\infty)$时,$g'(x)>0$,$g(x)$在区间$(1,+\infty)$上单调递增.

故 $g(1)=1$ 是 $g(x)$在区间$(-\infty,+\infty)$上的最小值,

从而 $g(x)>0$,$x\in(-\infty,+\infty)$.

综上可知,$f'(x)>0$,$x\in(-\infty,+\infty)$,

故 $f(x)$的单调递增区间为$(-\infty,+\infty)$.

押题 2.【解析】(1)函数 $f(x)$的定义域为 $\mathbf{R}$,$f'(x)=e^x-a$.

当 $a\leqslant0$ 时,$f'(x)>0$,所以 $f(x)$在 $\mathbf{R}$ 上为增函数;

当 $a>0$ 时,由 $f'(x)=0$ 得 $x=\ln a$,

则当 $x\in(-\infty,\ln a)$时,$f'(x)<0$,

所以函数 $f(x)$在$(-\infty,\ln a)$上为减函数,

当 $x\in(\ln a,+\infty)$时,$f'(x)>0$,

所以函数 $f(x)$在$(\ln a,+\infty)$上为增函数.

(2)当 $a=1$ 时,$g(x)=(x-m)(e^x-x)-e^x+x^2+x$.

因为 $g(x)$在$(2,+\infty)$上为增函数,

所以 $g'(x)=xe^x-me^x+m+1\geqslant0$ 在$(2,+\infty)$上恒成立,

即 $m\leqslant\frac{xe^x+1}{e^x-1}$在$(2,+\infty)$上恒成立.

令 $h(x)=\frac{xe^x+1}{e^x-1}$,$x\in(2,+\infty)$,

则 $h'(x)=\frac{(e^x)^2-xe^x-2e^x}{(e^x-1)^2}=\frac{e^x(e^x-x-2)}{(e^x-1)^2}$.

令 $L(x)=e^x-x-2$,$L'(x)=e^x-1>0$ 在$(2,+\infty)$上恒成立,

即 $L(x)=e^x-x-2$ 在$(2,+\infty)$上为增函数,

即 $L(x)>L(2)=e^2-4>0$,

所以 $h'(x)>0$ 在$(2,+\infty)$上成立,

即 $h(x)=\frac{xe^x+1}{e^x-1}$在$(2,+\infty)$上为增函数,

所以 $h(x)>h(2)=\frac{2e^2+1}{e^2-1}$,所以 $m\leqslant\frac{2e^2+1}{e^2-1}$.

所以实数 m 的取值范围是$\left(-\infty,\frac{2e^2+1}{e^2-1}\right]$.

押题 3.【解析】(1)由 $f(0)=1+2f(0)$,得 $f(0)=-1$.

因为 $f'(x)=2e^{2x}-2e^x-f'(0)$,

所以 $f'(0)=2-2-f'(0)$,解得 $f'(0)=0$.

所以 $f(x)=e^{2x}-2e^x$,$f'(x)=2e^{2x}-2e^x=2e^x(e^x-1)$,

当 $x\in(-\infty,0)$时,$f'(x)<0$,则函数 $f(x)$在$(-\infty,0)$上单调递减;

当 $x\in(0,+\infty)$时,$f'(x)>0$,则函数 $f(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增.

(2)令 $g(x)=af(x)-e^x+x=ae^{2x}-(2a+1)e^x+x$,

根据题意,当 $x\in(0,+\infty)$时,$g(x)<0$ 恒成立.

$g'(x)=2ae^{2x}-(2a+1)e^x+1=(2ae^x-1)(e^x-1)$.

①当 $0<a<\frac{1}{2}$,$x\in(-\ln 2a,+\infty)$时,$g'(x)>0$ 恒成立,

所以 $g(x)$在$(-\ln 2a,+\infty)$上是增函数,

且 $g(x)\in(g(-\ln 2a),+\infty)$,所以不符合题意;

②当 $a\geqslant\frac{1}{2}$,$x\in(0,+\infty)$时,$g'(x)>0$ 恒成立,

所以 $g(x)$在$(0,+\infty)$上是增函数,

且 $g(x)\in(g(0),+\infty)$,所以不符合题意;

③当 $a\leqslant0$ 时,因为 $x\in(0,+\infty)$,所以恒有 $g'(x)<0$,

故 $g(x)$在$(0,+\infty)$上是减函数,于是“$g(x)<0$ 对任意 $x\in(0,+\infty)$都成立”的充要条件是 $g(0)\leqslant0$,

即 $a-(2a+1)\leqslant 0$,解得 $a\geqslant -1$,故 $-1\leqslant a\leqslant 0$.
综上,a 的取值范围是 $[-1,0]$.

押题 4.【解析】(1)$f'(x)=2x-\dfrac{a}{x}=\dfrac{2x^2-a}{x}(x>0)$.

当 $a\leqslant 0$ 时,$f'(x)>0$ 在 $(0,+\infty)$ 上恒成立,所以函数 $f(x)$ 的单调递增区间为 $(0,+\infty)$,此时 $f(x)$ 无单调递减区间.

当 $a>0$ 时,由 $f'(x)>0$,得 $x>\dfrac{\sqrt{2a}}{2}$,由 $f'(x)<0$,得 $0<x<\dfrac{\sqrt{2a}}{2}$,

所以函数 $f(x)$ 的单调递增区间为 $\left(\dfrac{\sqrt{2a}}{2},+\infty\right)$,单调递减区间为 $\left(0,\dfrac{\sqrt{2a}}{2}\right)$.

(2) $F'(x)=2x-(a-2)-\dfrac{a}{x}=\dfrac{2x^2-(a-2)x-a}{x}=\dfrac{(2x-a)(x+1)}{x}(x>0)$.

因为函数 $F(x)$ 有两个零点,所以 $a>0$,此时函数 $F(x)$ 在 $\left(\dfrac{a}{2},+\infty\right)$ 上单调递增,在 $\left(0,\dfrac{a}{2}\right)$ 上单调递减.

所以 $F(x)$ 的最小值 $F\left(\dfrac{a}{2}\right)<0$,即 $-a^2+4a-4a\ln\dfrac{a}{2}<0$.

因为 $a>0$,所以 $a+4\ln\dfrac{a}{2}-4>0$.

令 $h(a)=a+4\ln\dfrac{a}{2}-4$,显然 $h(a)$ 在 $(0,+\infty)$ 上为增函数,且 $h(2)=-2<0$,$h(3)=4\ln\dfrac{3}{2}-1=\ln\dfrac{81}{16}-1>0$,所以存在 $a_0\in(2,3)$,$h(a_0)=0$.
当 $a>a_0$ 时,$h(a)>0$;当 $0<a<a_0$ 时,$h(a)<0$.
所以满足条件的最小正整数 $a=3$.
又当 $a=3$ 时,$F(3)=3(2-\ln 3)>0$,$F(1)=0$,所以 $a=3$ 时,$f(x)$ 有两个零点.
综上所述,满足条件的最小正整数 a 的值为 3.