\ 数学学科 /

命题角度 1——数列

押题 1　在等差数列$\{a_n\}$中，已知$a_{1\,009}=4$，$S_{2\,018}=2\,018$，则$S_{2\,019}=$（　　）

A. $-2\,019$　B. $2\,019$　C. $-4\,038$　D. $4\,038$

押题 2　已知递增等比数列$\{a_n\}$满足$a_3\cdot a_7=6$，$a_2+a_8=5$，则$\frac{a_{10}}{a_4}=$（　　）

A. $\frac{5}{6}$　B. $\frac{6}{5}$　C. $\frac{2}{3}$　D. $\frac{3}{2}$

押题 3　在数列$\{a_n\}$中，已知$a_1=3$，$a_{n+1}=\frac{3a_n}{a_n+3}$，则$a_4=$（　　）

A. $\frac{3}{4}$　B. 1　C. $\frac{4}{3}$　D. $\frac{3}{2}$

押题 4　在正项等比数列$\{a_n\}$中，$a_{1\,009}a_{1\,011}=100$，则$\lg a_1+\lg a_2+\cdots+\lg a_{2\,019}=$（　　）

A. $-2\,018$　B. $-2\,019$　C. $2\,018$　D. $2\,019$

押题 5　已知正项等比数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，且S_1，S_3，S_4成等差数列，则数列$\{a_n\}$的公比为________.

押题 6　已知数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，且$a_n>0$，$2a_nS_n=a_n^2+1$，若$[x]$表示不超过x的最大整数，如$[1.5]=1$，$[-2.3]=-3$，则$\left[\sum_{i=1}^{225}\frac{1}{S_i}\right]=$______.

二、解答题

押题 1　已知等比数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，$S_n=2a_n-2$，$\{b_n\}$为等差数列，$b_3=a_2$，$b_2+b_6=10$.

(1)求数列$\{a_n\}$，$\{b_n\}$的通项公式.

(2)求数列$\{a_n(2b_n-3)\}$的前n项和T_n.

押题 2　已知公差不为 0 的等差数列$\{a_n\}$的首项$a_1=2$，且a_1+1，a_2+1，a_4+1成等比数列.

(1)求数列$\{a_n\}$的通项公式.

(2)设$b_n=\frac{1}{a_na_{n+1}}$，$n\in\mathbf{N}^*$，S_n是数列$\{b_n\}$的前n项和，求使$S_n<\frac{3}{19}$成立的最大的正整数n.

押题 3　已知数列$\{a_n\}$是公差为 2 的等差数列，且a_2，a_5，a_{10}成等比数列.

(1)求数列$\{a_n\}$的通项公式.

(2)若$b_n=\frac{1}{a_na_{n+1}}$，求数列$\{b_n\}$的前n项和T_n.

押题 4　已知数列$\{a_n\}(n\in\mathbf{N}^*)$是公差为正数的等差数列，$a_1=1$，且$a_2$，$a_4$，$a_8$成等比数列.

(1)求数列$\{a_n\}$的通项公式.

(2)设数列$\left\{\frac{2}{a_n\cdot a_{n+1}}\right\}$的前$n$项和为$T_n$，求$T_n$.

命题角度 2——三角函数

押题 1　函数$f(x)=\cos 2x+6\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)-5$的最大值为（　　）

A. 4　B. 0　C. 6　D. 7

押题 2　函数$f(x)=(\sqrt{3}\sin x+\cos x)(\sqrt{3}\cos x-\sin x)$的对称中心可能是（　　）

A. $\left(-\frac{\pi}{12},0\right)$　B. $\left(-\frac{\pi}{6},0\right)$

C. $\left(-\frac{\pi}{3},0\right)$　D. $\left(-\frac{5\pi}{12},0\right)$

押题 3　将函数$y=\sin x+\sqrt{3}\cos x$的图象向右平移$\varphi(\varphi>0)$个单位，再向上平移 1 个单位，所得图象过点$\left(\frac{\pi}{4},1\right)$，则$\varphi$最小值为________.

押题 4　函数$f(x)=\cos\left(\omega x+\frac{\pi}{6}\right)(\omega>0)$的图象上的两个相邻的最高点和最低点的横坐标之差为$\frac{\pi}{2}$，则函数在$[0,3\pi]$上的零点个数为________.

押题 5　在$\triangle ABC$中，$B=120°$，$AB=\sqrt{2}$，A的角平分线$AD=\sqrt{3}$，则$AC=$________.

押题 6　已知$\triangle ABC$的三个内角A，B，C的对边依次为a，b，c，且$\frac{a}{\sin A}=2$，$b(\tan A+\tan B)=2c\tan B$，则$\triangle ABC$面积的最大值为________.

二、解答题

押题 1　已知a，b分别是$\triangle ABC$内角A，B的对边，且$b\sin^2 A=\sqrt{3}a\cos A\sin B$，函数$f(x)=\sin A\cos^2 x-\sin^2\frac{A}{2}\sin 2x$，$x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$.

(1)求A.

(2)求函数$f(x)$的值域.

押题 2　$\triangle ABC$的内角A，B，C的对边分别为a，b，c. 已知$(a-b)\sin A=c\sin C-b\sin B$.

(1)求C.

(2)若$\triangle ABC$的周长为 6，求$\triangle ABC$的面积的最大值.

押题 3　在$\triangle ABC$中，角A，B，C所对的边分别为a，b，c，$\cos B=\frac{2c\cos C}{a}-\frac{b}{a}\cos A$.

(1)求角C.

(2)若$a=5$，$c=\sqrt{21}$，求$\triangle ABC$的面积.

押题 4　已知点$P(\sqrt{3},1)$，$Q(\cos 2x,\sin 2x)$，O为坐标原点，函数$f(x)=\frac{1}{\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}}$.

(1)求函数$f(x)$的最小正周期.

(2)若一个三角形的三个角成等差数列，且最小角恰好使$f(x)$取得最小值，且其对边长为 1，求该三角形的最大边长.

命题角度 3——坐标系与参数方程

押题 1　在直角坐标系xOy中，直线l倾斜角为α，其参数方程为$\begin{cases}x=-2+t\cos\alpha,\\y=t\sin\alpha\end{cases}$($t$为参数)，在以原点$O$为极点，$x$轴正半轴为极轴的极坐标系中(取相同的长度单位)，曲线C的极坐标方程为$\rho-4\cos\theta=0$.

(1)若直线l与曲线C有公共点，求直线l倾斜角α的取值范围.

(2)设$M(x,y)$为曲线C上任意一点，求$x+\sqrt{3}y$的取值范围.

◈ 押题 2　在平面直角坐标系 xOy 中，直线 l 的参数方程为 $\begin{cases}x=-\dfrac{3}{5}t+2,\\ y=\dfrac{4}{5}t\end{cases}$ (t 为参数)，以原点 O 为极点，x 轴正半轴为极轴建立极坐标系，圆 C 的极坐标方程为 $\rho=a\sin\theta(a\neq0)$.

(1)求圆 C 的直角坐标系方程与直线 l 的普通方程.

(2)设直线 l 截圆 C 的弦长等于圆 C 的半径长的 $\sqrt{3}$ 倍，求 a 的值.

◈ 押题 3　以平面直角坐标系的原点 O 为极点，x 轴的正半轴为极轴，建立极坐标系，两种坐标系中取相同的长度单位，已知直线 l 的参数方程是 $\begin{cases}x=t+2,\\ y=2t+1\end{cases}$ (t 为参数)，曲线 C 的极坐标方程是 $\rho\tan\theta=8\sin\theta$.

(1)求直线 l 和曲线 C 的普通方程.

(2)求直线 l 被曲线 C 截得的弦长.

◈ 押题 4　在平面直角坐标系 xOy 中，曲线 C 的参数方程为：$\begin{cases}x=\cos\theta,\\ y=\sqrt{3}\sin\theta\end{cases}$ (θ 为参数，$\theta\in[0,\pi]$).

(1)以原点为极点，x 轴的正半轴为极轴建立坐标系，求 C 的极坐标方程.

(2)已知曲线 E: $x^2+y^2=1(y\geqslant0)$，若直线 l: $\begin{cases}x=t\cos\alpha,\\ y=t\sin\alpha\end{cases}$ (t 为参数)与 E,C 相交于 A,B 两点，且 $|AB|=\sqrt{2}-1$，求 α 的值.

答案解析

—— 数学学科 ——

· 命题角度 1——数列

押题 1.【解析】选 C. 因为 $\{a_n\}$ 是等差数列，所以 $S_{2\,018}=1\,009(a_1+a_{2\,018})=1\,009(a_{1\,009}+a_{1\,010})=2\,018$，则 $a_{1\,009}+a_{1\,010}=2$，又 $a_{1\,009}=4$，所以 $a_{1\,010}=-2$，则 $S_{2\,019}=\dfrac{2\,019(a_1+a_{2\,019})}{2}=2\,019a_{1\,010}=-4\,038$.

押题 2.【解析】选 D. 因为 $a_3\cdot a_7=a_2\cdot a_8=6$，且 $a_2+a_8=5$，数列 $\{a_n\}$ 单调递增，故 $a_2=2$，$a_8=3$，

故 $\dfrac{a_{10}}{a_4}=\dfrac{a_8}{a_2}=\dfrac{3}{2}$.

押题 3.【解析】选 A. 依题意得 $\dfrac{1}{a_{n+1}}=\dfrac{a_n+3}{3a_n}=\dfrac{1}{a_n}+\dfrac{1}{3}$，$\dfrac{1}{a_{n+1}}-\dfrac{1}{a_n}=\dfrac{1}{3}$，故数列 $\left\{\dfrac{1}{a_n}\right\}$ 是以 $\dfrac{1}{a_1}=\dfrac{1}{3}$ 为首项、$\dfrac{1}{3}$ 为公差的等差数列，则 $\dfrac{1}{a_n}=\dfrac{1}{3}+\dfrac{n-1}{3}=\dfrac{n}{3}$，$a_n=\dfrac{3}{n}$，$a_4=\dfrac{3}{4}$.

押题 4.【解析】选 D. 由题意可得 $a_1a_{2\,019}=a_2a_{2\,018}=\cdots=a_{1\,009}a_{1\,011}=a_{1\,010}^2=100$，得 $a_{1\,010}=10$，则 $\lg a_1+\lg a_2+\cdots+\lg a_{2\,019}=\lg(a_{1\,010})^{2\,019}=2\,019\times1=2\,019$.

押题 5.【解析】因为 S_1,S_3,S_4 成等差数列，所以 $2S_3=S_4+S_1$，即 $S_4-S_3=S_3-S_1$，

从而得 $a_4=a_3+a_2$，所以 $q^2-q-1=0$，解得，

$q=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$(负值舍掉).

答案：$\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$

押题 6.【解析】依题意，$2a_nS_n=a_n^2+1$，故当 $n\geqslant2$ 时，$2(S_n-S_{n-1})S_n=(S_n-S_{n-1})^2+1$，化简得 $S_n^2=S_{n-1}^2+1$，而当 $n=1$ 时，$a_1=1$，故数列 $\{S_n^2\}$ 是以 1 为首项 1 为公差的等差数列，故 $S_n=\sqrt{n}$，而当 $n\geqslant2$ 时，$2(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})=\dfrac{2}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}<\dfrac{2}{2S_n}<\dfrac{2}{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}}=2(\sqrt{n}-\sqrt{n-1})$，记 $T=\sum\limits_{i=1}^{225}\dfrac{1}{S_i}$，故 $T>2[(\sqrt{226}-\sqrt{225})+(\sqrt{225}-\sqrt{224})+\cdots+(\sqrt{2}-1)]=2(\sqrt{226}-1)$，另一方面 $T<1+2[(\sqrt{225}-\sqrt{224})+(\sqrt{224}-\sqrt{223})+\cdots+(\sqrt{2}-1)]=29$，故 $\sum\limits_{i=1}^{225}\dfrac{1}{S_i}\in(2(\sqrt{226}-1),29)$，则 $\left[\sum\limits_{i=1}^{225}\dfrac{1}{S_i}\right]=28$.

答案：28

二、解答题

押题 1.【解析】(1)根据题意，等比数列 $\{a_n\}$ 中 $S_n=2a_n-2$，

当 $n=1$ 时，有 $S_1=2a_1-2=a_1$，解得 $a_1=2$，

当 $n\geqslant2$ 时，$a_n=S_n-S_{n-1}=(2a_n-2)-(2a_{n-1}-2)$，

变形可得 $a_n=2a_{n-1}$，

则等比数列 $\{a_n\}$ 的 $a_1=2$，公比 $q=2$，

则数列 $\{a_n\}$ 的通项公式 $a_n=2\times2^{n-1}=2^n$，

对于 $\{b_n\}$，$b_3=a_2=4$，$b_2+b_6=2b_4=10$，即 $b_4=5$，

则其公差 $d=b_4-b_3=1$，

则其通项公式 $b_n=b_3+(n-3)\times d=n+1$.

(2)由(1)的结论：$a_n=2^n$，$b_n=n+1$，得

$a_n(2b_n-3)=(2n-1)\cdot2^n$，

则有 $T_n=1\times2+3\times2^2+5\times2^3+\cdots+(2n-1)\times2^n$，①

$2T_n=1\times2^2+3\times2^3+5\times2^4+\cdots+(2n-1)\times2^{n+1}$，②

①－②可得：$-T_n=2+2(2^2+2^3+\cdots+2^n)-(2n-1)\times2^{n+1}$，

变形可得：$T_n=(2n-3)\cdot2^{n+1}+6$.

押题 2.【解析】(1)设数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d，则 $a_n=2+(n-1)d$，$n\in\mathbf{N}^*$. 由 a_1+1,a_2+1,a_4+1 成等比数列，

得 $(a_2+1)^2=(a_1+1)(a_4+1)$，

即 $(3+d)^2=3(3+3d)$，得 $d=0$(舍去)或 $d=3$，

所以数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n=3n-1$，$n\in\mathbf{N}^*$.

(2)因为 $b_n=\dfrac{1}{a_n\cdot a_{n+1}}=\dfrac{1}{(3n-1)(3n+2)}$

$=\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{3n-1}-\dfrac{1}{3n+2}\right)$

$=\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{5}\right)+\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{5}-\dfrac{1}{8}\right)+\cdots+\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{3n-1}-\dfrac{1}{3n+2}\right)$

$=\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3n+2}\right)=\dfrac{n}{2(3n+2)}$，

由 $S_n<\dfrac{3}{19}$，即 $\dfrac{n}{2(3n+2)}<\dfrac{3}{19}$，解得 $n<12$，

所以使 $S_n<\dfrac{3}{19}$ 成立的最大正整数 $n=11$.

押题 3.【解析】(1)由题意知 $\{a_n\}$ 是等差数列，设其通项公式为 $a_n=a_1+2(n-1)$，

因为 a_2,a_5,a_{10} 成等比数列，

所以 $(a_1+2)(a_1+18)=(a_1+8)^2$，

所以 $a_1=7$. 所以 $a_n=2n+5$.

(2)由(1)可得

$b_n=\dfrac{1}{(2n+5)(2n+7)}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2n+5}-\dfrac{1}{2n+7}\right)$，

所以 $T_n=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{7}-\dfrac{1}{9}\right)+\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{9}-\dfrac{1}{11}\right)+\cdots+$

$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n+5}-\frac{1}{2n+7}\right)$,

即 $T_n=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{7}-\frac{1}{2n+7}\right)$,

所以 $T_n=\frac{n}{14n+49}$.

押题 4.【解析】(1)由题意设$\{a_n\}$的公差为 $d(d>0)$,

因为 a_2,a_4,a_8 成等比数列,即 $a_4^2=a_2\cdot a_8$.

即$(a_1+3d)^2=(a_1+d)\cdot(a_1+7d)$.

化简得 $d^2=a_1d$. 又 $a_1=1$,且 $d>0$,解得 $d=1$.

所以有 $a_n=a_1+(n-1)d=n$.

(2)由(1)得:$\frac{2}{a_n\cdot a_{n+1}}=\frac{2}{n\cdot(n+1)}=2\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$.

所以 $T_n=2\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=2-\frac{2}{n+1}$

$=\frac{2n}{n+1}$.

· 命题角度 2——三角函数

押题 1.【解析】选 B. 因为 $f(x)=\cos 2x+6\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)-5=$

$\cos 2x+6\sin x-5=-4-2\sin^2x+6\sin x$

$=-2\left(\sin x-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{1}{2}$,又 $\sin x\in[-1,1]$,

所以当 $\sin x=1$ 时,$f(x)$取得最大值 0.

押题 2.【解析】选 B. 因为 $f(x)=(\sqrt{3}\sin x+\cos x)(\sqrt{3}\cos x-\sin x)$

$=3\sin x\cos x+\sqrt{3}\cos^2x-\sqrt{3}\sin^2x-\sin x\cos x$

$=\sin 2x+\sqrt{3}\cos 2x=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$,

所以 $2x+\frac{\pi}{3}=k\pi,k\in\mathbf{Z}$,

所以 $x=\frac{k\pi}{2}-\frac{\pi}{6},k\in\mathbf{Z}$,所以 $k=0$ 时$\left(-\frac{\pi}{6},0\right)$是对称中心.

押题 3.【解析】依题意,将 $y=2\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$的图象向右平移 φ 个单位得到 $y=2\sin\left(x-\varphi+\frac{\pi}{3}\right)$的图象,再向上平移 1 个单位得到 $y=2\sin\left(x-\varphi+\frac{\pi}{3}\right)+1$ 的图象,又该图象经过点$\left(\frac{\pi}{4},1\right)$,于是有 $2\sin\left(\frac{\pi}{4}-\varphi+\frac{\pi}{3}\right)+1=1$,

即 $\sin\left(\frac{7\pi}{12}-\varphi\right)=0,\varphi-\frac{7\pi}{12}=k\pi,k\in\mathbf{Z},\varphi=k\pi+\frac{7\pi}{12},k\in\mathbf{Z}$,因此正数 φ 的最小值是$\frac{7\pi}{12}$.

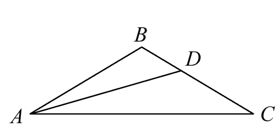
答案:$\frac{7\pi}{12}$

押题 4.【解析】由已知得 $f(x)=\cos\left(\omega x+\frac{\pi}{6}\right)$的周期为 π,即 $\frac{2\pi}{\omega}=\pi$,得 $\omega=2$,

所以 $f(x)=\cos\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$. 当 $f(x)=0$ 时,$2x+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}+k\pi(k\in\mathbf{Z})$,即 $x=\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{6}(k\in\mathbf{Z})$,则当 $x\in[0,3\pi]$时 $f(x)$有 6 个零点.

答案:6

押题 5.【解析】如图,在$\triangle ABD$ 中,由正弦定理,得$\frac{AD}{\sin B}=\frac{AB}{\sin\angle ADB}$,



所以 $\sin\angle ADB=\frac{\sqrt{2}}{2}$. 由题意知 $0°<\angle ADB<60°$,

所以$\angle ADB=45°$,所以$\angle BAD=180°-45°-120°=15°$.

所以$\angle BAC=30°$,$C=30°$,所以 $BC=AB=\sqrt{2}$. 在$\triangle ABC$ 中,由正弦定理,得$\frac{AC}{\sin B}=\frac{BC}{\sin\angle BAC}$,所以 $AC=\sqrt{6}$.

答案:$\sqrt{6}$

押题 6.【解析】由题意知 $\frac{\tan A}{\tan B}=\frac{2c-b}{b}$,结合正弦定理得 $\frac{\sin A\cos B}{\cos A\sin B}=\frac{2\sin C-\sin B}{\sin B}$.

因为 $B,C\in(0,\pi)$,所以 $\sin B\neq0,\sin C\neq0$.

则 $\sin A\cos B+\sin B\cos A=2\sin C\cos A$,

即 $\sin C=2\sin C\cos A$,

解得 $\cos A=\frac{1}{2}$,则 $\sin A=\frac{\sqrt{3}}{2}$,所以 $a=\sqrt{3}$.

又由余弦定理得 $b^2+c^2-a^2=2bc\cos A$.

即 $b^2+c^2-3=bc$. 又 $b^2+c^2-3\geqslant2bc-3$. 解得 $bc\leqslant3$.

所以 $S_{\max}=\frac{1}{2}bc\cdot\sin A=\frac{1}{2}\times3\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{3\sqrt{3}}{4}$.

答案:$\frac{3\sqrt{3}}{4}$

二、解答题

押题 1.【解析】(1)在$\triangle ABC$ 中,$b\sin^2A=\sqrt{3}a\cos A\sin B$,

由正弦定理得,$\sin B\sin^2A=\sqrt{3}\sin A\cos A\sin B$,

又 A,B 为$\triangle ABC$ 的内角,故 $\sin A\sin B\neq0$,

所以 $\tan A=\frac{\sin A}{\cos A}=\sqrt{3}$,又 $A\in(0,\pi)$,所以 $A=\frac{\pi}{3}$.

(2)由 $A=\frac{\pi}{3}$,所以函数 $f(x)=\sin A\cos^2x-\sin^2\frac{A}{2}\sin 2x$

$=\frac{\sqrt{3}}{2}\cos^2x-\frac{1}{4}\sin 2x=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1+\cos 2x}{2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\sin 2x$

$=-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\sin 2x-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2x\right)+\frac{\sqrt{3}}{4}$

$=-\frac{1}{2}\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)+\frac{\sqrt{3}}{4}$,

因为 $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$,所以$-\frac{\pi}{3}\leqslant2x-\frac{\pi}{3}\leqslant\frac{2\pi}{3}$,

所以$-\frac{\sqrt{3}}{2}\leqslant\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)\leqslant1$,

所以$\frac{\sqrt{3}-2}{4}\leqslant-\frac{1}{2}\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)+\frac{\sqrt{3}}{4}\leqslant\frac{\sqrt{3}}{2}$,

所以 $f(x)$的值域为$\left[\frac{\sqrt{3}-2}{4},\frac{\sqrt{3}}{2}\right]$.

押题 2.【解析】(1)由正弦定理结合已知条件可得 $a(a-b)=c^2-b^2$,所以 $a^2+b^2-c^2=ab$,

所以 $\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\frac{ab}{2ab}=\frac{1}{2}$,

又 $0<C<\pi$,所以 $C=\frac{\pi}{3}$.

(2)由(1)可得 $a^2+b^2-c^2=ab$,

所以 $c^2=a^2+b^2-ab=(a+b)^2-3ab$,

又 $a+b+c=6$,

所以 $c=6-(a+b)$,$[6-(a+b)]^2=(a+b)^2-3ab$,

所以 $a+b=\frac{ab+12}{4}$,又$\frac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab}$,

所以 $a+b=\frac{ab+12}{4}\geqslant2\sqrt{ab}$,即$(\sqrt{ab}-2)(\sqrt{ab}-6)\geqslant0$,

所以 $0<ab\leqslant 4$ 或 $ab\geqslant 36$（不符合题意，舍去），

所以 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{\sqrt{3}}{4}ab\leqslant\sqrt{3}$，

当且仅当 $a=b=2$ 时等号成立，所以△ABC 的面积的最大值为$\sqrt{3}$.

押题 3.【解析】(1)因为 $\cos B=\frac{2c\cos C}{a}-\frac{b}{a}\cos A$，所以由正弦定理得 $\sin A\cos B+\cos A\sin B=2\sin C\cos C$，

所以 $\sin(A+B)=2\sin C\cos C$，所以 $\cos C=\frac{1}{2}$，

因为 $C\in(0,\pi)$，所以 $C=\frac{\pi}{3}$.

(2)由余弦定理得 $b^2+5^2-2\times 5b\times\frac{1}{2}=21$，

解得 $b=1$ 或 $b=4$，所以三角形的面积为 $S=\frac{1}{2}ba\sin C=\frac{5}{4}\sqrt{3}$，或 $S=5\sqrt{3}$.

押题 4.【解析】(1)$\overrightarrow{OP}=(\sqrt{3},1)$，$\overrightarrow{OQ}=(\cos 2x,\sin 2x)$，

所以$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}=\sqrt{3}\cos 2x+\sin 2x=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$

所以 $f(x)=\frac{1}{2\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)}\left(x\neq\frac{k\pi}{2}-\frac{\pi}{6},k\in\mathbf{Z}\right)$，

所以最小正周期为 π.

(2)若 A,B,C 成等差数列，则 $B=\frac{\pi}{3}$，要使 $f(x)$ 最小，只要 $\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)=1$，

即 $2x+\frac{\pi}{3}=2k\pi+\frac{\pi}{2}\Rightarrow x=k\pi+\frac{\pi}{12}(k\in\mathbf{Z})$，

所以 $A=\frac{\pi}{12}$，最大角为 $C=\frac{7\pi}{12}$，

根据正弦定理得$\frac{c}{\sin\frac{7\pi}{12}}=\frac{1}{\sin\frac{\pi}{12}}$，

解得 $c=2+\sqrt{3}$.

所以该三角形的最大边长为 $2+\sqrt{3}$.

· 命题角度 3——坐标系与参数方程

押题 1.【解析】(1)曲线 C 的极坐标方程为 $\rho-4\cos\theta=0$.

转化为：$x^2+y^2-4x=0$，整理得：$(x-2)^2+y^2=4$，

所以曲线 C 是圆心为(2,0)，半径为 2 的圆.

因为直线 l 过点 $P(-2,0)$，当 l 斜率不存在时，l 的方程为 $x=-2$ 与曲线 C 没有公共点；

所以当直线 l 斜率存在时，

设直线 l 的方程为：$y=k(x+2)$，即 $kx-y+2k=0$.

直线 l 与圆有公共点，则 $d=\frac{|2k+2k|}{\sqrt{1+k^2}}\leqslant 2$，

解得：$-\frac{\sqrt{3}}{3}\leqslant k\leqslant\frac{\sqrt{3}}{3}$，

因为 $\alpha\in[0,\pi)$，所以 α 的取值范围是$\left[0,\frac{\pi}{6}\right]\cup\left[\frac{5\pi}{6},\pi\right)$.

(2)曲线 C 的直角坐标方程为：$x^2+y^2-4x=0$，

可化为：$(x-2)^2+y^2=4$.

其参数方程为：$\begin{cases}x=2+2\cos\theta,\\ y=2\sin\theta\end{cases}$（$\theta$ 为参数）.

因为 $M(x,y)$ 为曲线 C 上任意一点，

所以 $x+\sqrt{3}y=2+2\cos\theta+2\sqrt{3}\sin\theta=2+4\sin\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)$，

由于$-1\leqslant\sin\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)\leqslant 1$，

则$-4\leqslant 4\sin\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)\leqslant 4$.

所以：$-2\leqslant 4\sin\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)+2\leqslant 6$.

所以 $x+\sqrt{3}y$ 的取值范围是$[-2,6]$.

押题 2.【解析】(1)直线 l 的参数方程为$\begin{cases}x=-\frac{3}{5}t+2,\\ y=\frac{4}{5}t\end{cases}$（$t$ 为参数），

消去参数 t，可得：$4x+3y-8=0$；

由圆 C 的极坐标方程为 $\rho=a\sin\theta(a\neq 0)$，

可得 $\rho^2=a\rho\sin\theta$，根据 $\rho\sin\theta=y$，$\rho^2=x^2+y^2$.

可得圆 C 的直角坐标系方程为 $x^2+y^2-ay=0$，

即 $x^2+\left(y-\frac{a}{2}\right)^2=\frac{a^2}{4}$.

(2)由(1)可知圆 C 的圆心为$\left(0,\frac{a}{2}\right)$，半径 $r=\frac{a}{2}$，

直线方程为 $4x+3y-8=0$；

那么，圆心到直线的距离 $d=\frac{\left|\frac{3a}{2}-8\right|}{5}=\left|\frac{3a-16}{10}\right|$，

直线 l 截圆 C 的弦长为$\frac{\sqrt{3}a}{2}=2\sqrt{r^2-d^2}$.

解得：$a=32$ 或 $a=\frac{32}{11}$.

故得直线 l 截圆 C 的弦长等于圆 C 的半径长的$\sqrt{3}$倍时 a 的值为 32 或$\frac{32}{11}$.

押题 3.【解析】(1)由$\begin{cases}x=t+2,\\ y=2t+1\end{cases}$（$t$ 为参数）得，直线 l 的普通方程是：$2x-y-3=0$，

由 $\rho\tan\theta=8\sin\theta$，得 $\rho\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=8\sin\theta$，即 $\rho=8\cos\theta$，即 $x^2+y^2=8x$，即曲线 C 的普通方程为$(x-4)^2+y^2=16$.

(2)由(1)知圆$(x-4)^2+y^2=16$ 的圆心是(4,0)，半径为 4，所以圆心到直线 l 的距离为 $d=\frac{|2\times 4-0-3|}{\sqrt{2^2+1^2}}=\sqrt{5}$，所以直线 l 被曲线 C 截得的弦长为 $2\sqrt{r^2-d^2}=2\sqrt{16-5}=2\sqrt{11}$.

押题 4.【解析】(1)曲线 C 的一般方程为 $x^2+\frac{y^2}{3}=1(y\geqslant 0)$，

令 $x=\rho\cos\theta$，$y=\rho\sin\theta$，

所以 C 的极坐标方程为

$\rho^2=\frac{3}{3\cos^2\theta+\sin^2\theta}=\frac{3}{2\cos^2\theta+1}(\theta\in[0,\pi])$.

(2)在(1)中建立的极坐标系中，直线 l 的极坐标方程为 $\theta=\alpha(\rho\in\mathbf{R})$，由$\begin{cases}\rho=1,\\ \theta=\alpha,\end{cases}$得 $\rho_A=1$，

由$\begin{cases}\rho^2=\frac{3}{2\cos^2\theta+1},\\ \theta=\alpha\end{cases}$得 $\rho_B=\sqrt{\frac{3}{2\cos^2\alpha+1}}>1$，

所以$\sqrt{\frac{3}{2\cos^2\alpha+1}}-1=\sqrt{2}-1$，

所以 $\cos\alpha=\pm\frac{1}{2}$，而 $\alpha\in[0,\pi]$，

所以 $\alpha=\frac{\pi}{3}$或$\frac{2\pi}{3}$.