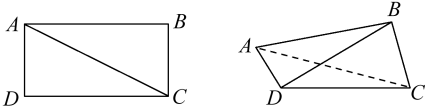
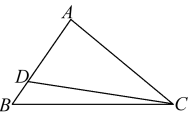
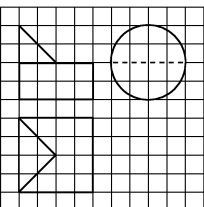


本试卷分第 I 卷(选择题)和第 II 卷(非选择题)两部分,共 150 分,考试时间 120 分钟.

第 I 卷

一、选择题(本大题共 12 小题,每小题 5 分,共 60 分. 在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的)

1. 若集合 $A=\{x|x^2-5x+4<0\}$, $B=\{x|(x-a)^2<1\}$, 则“ $a\in(2,3)$ ”是“ $B\subseteq A$ ”的
()
A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件
2. 已知复数 $z=\frac{2+3i}{i}$, 则 z 的共轭复数为
()
A. $3-2i$ B. $3+2i$ C. $-3-2i$ D. $-3+2i$
3. 向量 $\boldsymbol{a}=(\cos \alpha, \sin \alpha)$, $\boldsymbol{b}=(\cos \beta, \sin \beta)$, 其中 $0<\alpha<\beta<\pi$, 若 $|2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}|$, 则 $\alpha-\beta=$
()
A. $\frac{\pi}{2}$ B. $-\frac{\pi}{2}$ C. $\frac{\pi}{4}$ D. $-\frac{\pi}{4}$
4. 二项式 $\left(ax+\frac{\sqrt{3}}{6}\right)^6$ 的展开式的第二项的系数为 $-\sqrt{3}$, 则 $\int_{-2}^a x^2 dx$ 的值为
()
A. $\frac{5}{3}$ B. $\frac{7}{3}$ C. 3 D. $\frac{11}{3}$
5. 如图, 在矩形 $ABCD$ 中, $AB=8, BC=6$, 现沿 AC 折起, 使得平面 $ABC\perp$ 平面 ADC , 连接 BD , 得到三棱锥 $B-ACD$, 则其外接球的体积为
()

A. $\frac{500\pi}{9}$ B. $\frac{250\pi}{3}$ C. $\frac{1\,000\pi}{3}$ D. $\frac{500\pi}{3}$
6. 下列函数中, 为偶函数且在 $(0, +\infty)$ 上为增函数的是
()
A. $f(x)=\cos^2 x$ B. $f(x)=-x^2+3$
C. $f(x)=x^{\frac{1}{4}}+x^2$ D. $f(x)=x(3^x-3^{-x})$
7. 点 P 是双曲线 $C_1: \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0, b>0)$ 与圆 $C_2: x^2+y^2=a^2+b^2$ 的一个交点, 且 $2\angle PF_1F_2=\angle PF_2F_1$, 其中 F_1, F_2 分别为双曲线 C_1 的左、右焦点, 则双曲线 C_1 的离心率为
()

- A. $\sqrt{3}+1$ B. $\frac{\sqrt{3}+1}{2}$
C. $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$ D. $\sqrt{5}-1$
8. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, D 是 AB 边上的点, 且满足 $AD=3BD, AD+AC=BD+BC=2, CD=\sqrt{2}$, 则 $\cos A=$
()
A. $\frac{1}{3}$ B. $\frac{\sqrt{2}}{4}$ C. $\frac{1}{4}$ D. 0

9. 已知函数 $f(x)=x\cos x-\sin x-\frac{1}{3}x^3$, 则不等式 $f(2x+3)+f(1)<0$ 的解集为
()
A. $(-2, +\infty)$ B. $(-\infty, -2)$
C. $(-1, +\infty)$ D. $(-\infty, -1)$
10. 已知函数 $y=a+2\ln x\left(x\in\left[\frac{1}{e}, e\right]\right)$ 的图象上存在点 P , 函数 $y=-x^2-2$ 的图象上存在点 Q , 且点 P, Q 关于原点对称, 则 a 的取值范围是
()
A. $[e^2, +\infty)$ B. $\left[3, 4+\frac{1}{e}\right]$
C. $\left[4+\frac{1}{e^2}, e^2\right]$ D. $[3, e^2]$
11. 某几何体的三视图如图所示, 若图中小正方形的边长均为 1, 则该几何体的体积是
()
A. $\frac{28}{3}\pi$ B. $\frac{32}{3}\pi$
C. $\frac{52}{3}\pi$ D. $\frac{56}{3}\pi$

12. 若函数 $f(x)=\sin\left(\omega x-\frac{\pi}{6}\right)(\omega>0)$ 的图象相邻两个对称中心之间的距离为 $\frac{\pi}{2}$, 则 $f(x)$ 的一个单调递减区间为
()
A. $\left(-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right)$ B. $\left(-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{6}\right)$
C. $\left(\frac{\pi}{6}, \frac{2\pi}{3}\right)$ D. $\left(\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{6}\right)$

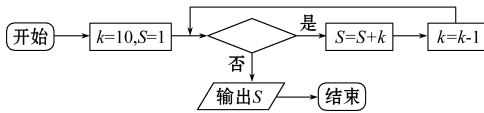
第 II 卷

本卷包括必考题和选考题两部分. 第 13—21 题为必考题, 每个实体考生都必须作答. 第 22—23 题为选考题, 考生根据要求作答.

二、填空题(本大题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分. 把答案填在题中横线上)

13. 若实数 x, y 满足约束条件 $\begin{cases} 2x+y-4\leq 0, \\ x-2y-2\leq 0, \\ x-1\geq 0, \end{cases}$ 则 $\frac{y-1}{x}$ 的最小值为_____.
14. 数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和记为 $S_n, a_1=1, a_{n+1}=2S_n+1(n\geq 1, n\in\mathbf{N}^*)$, 则数列 $\{a_n\}$ 的通项公式是_____.
15. 某框图所给的程序运行结果为 $S=35$, 那么判断框中应

填入的关于 k 的条件是_____.



16. 某航模兴趣小组的同学, 为了测定在湖面上航模航行的速度, 采用如下办法: 在岸边设置两个观察点 A, B , 且 AB 长为 80 米, 当航模在 C 处时, 测得 $\angle ABC=105^\circ$ 和 $\angle BAC=30^\circ$, 经过 20 秒后, 航模直线航行到 D 处, 测得 $\angle BAD=90^\circ$ 和 $\angle ABD=45^\circ$, 则航模的速度为_____米/秒. (答案保留根号)

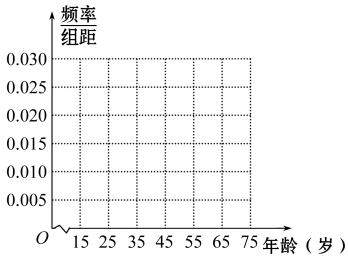
三、解答题(解答应写出文字说明,证明过程或演算步骤,17—21题每小题12分,22—23题每小题10分)

17. 已知公比不为1的等比数列 $\{a_n\}$ 的前3项积为27,且 $2a_2$ 为 $3a_1$ 和 a_3 的等差中项.
- (1)求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式 a_n .
- (2)若数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_n = b_{n-1} \cdot \log_3 a_{n+1} (n \geq 2, n \in \mathbb{N}^*)$,且 $b_1 = 1$,求数列 $\left\{\frac{b_n}{b_{n+2}}\right\}$ 的前 n 项和 S_n .

18. 为了缓解城市交通压力和改善空气质量,有些城市出台了一些汽车限行政策,如单双号出行,外地车限行等措施,对城市交通拥堵的缓解和空气质量的改良起了一定的作用.某中部城市为了应对日益增长的交通压力,现组织调研,准备出台新的交通限行政策,为了了解群众对“汽车限行”的态度,在当地市民中随机抽取了100人进行了调查,调查情况如表:

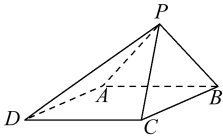
年龄段	[15,25)	[25,35)	[35,45)	[45,55)	[55,65)	[65,75]
频数	5	15	20	n	20	10
赞成人数	3	12	17	18	16	2

- (1)求出表格中 n 的值,并完成被调查人员年龄的频率分布直方图(如图所示).



- (2)若从年龄在 $[45,55)$ 的被调查者中按照是否赞成进行分层抽样,从中抽取10人参与某项调查,然后再从这10人中随机抽取3人参加座谈会,记赞成的人数记为 ξ ,求 ξ 的分布列.

19. 如图,在四棱锥 $P-ABCD$ 中,底面 $ABCD$ 是边长为2的菱形, $\angle ABC=60^\circ$, $PA \perp PB$, $PC=2$.
- (1)求证:平面 $PAB \perp$ 平面 $ABCD$.
- (2)若 $PA=PB$,求二面角 $A-PC-D$ 的余弦值.
20. 已知椭圆 $C: \frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的上、下两个焦点分别为 F_1, F_2 ,过 F_1 的直线交椭圆于 M, N 两点,且 $\triangle MNF_2$ 的周长为8,椭圆 C 的离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$.



- (1)求椭圆 C 的标准方程.
- (2)已知 O 为坐标原点,直线 $y=kx+m$ 与椭圆 C 有且仅有一个公共点,点 M', N' 是直线上的两点,且 $F_1M' \perp l$, $F_2M' \perp l$,求四边形 $F_1M'N'F_2$ 面积 S 的最大值.
21. 已知函数 $f(x) = \ln x + ax$.
- (1)讨论函数 $f(x)$ 的单调性.
- (2)当 $a=1$ 时,函数 $g(x) = f(x) - x + \frac{1}{2x} - m$ 有两个零点 x_1, x_2 ,且 $x_1 < x_2$.
- 求证: $x_1 + x_2 > 1$.

请考生在第22—23题中任选一题作答.如果多做,则按所做的第一题计分.作答时请写清题号.

22. 在直角坐标系 xOy 中,直线 l 的参数方程为 $\begin{cases} x=1+t\cos\alpha, \\ y=t\sin\alpha \end{cases} (t \text{ 为参数})$,以坐标原点 O 为极点, x 轴的正半轴为极轴建立极坐标系,曲线 C 的极坐标方程为 $\rho^2 - 2\rho\cos\theta - 4\rho\sin\theta + 4 = 0$.
- (1)若直线 l 与曲线 C 相切,求直线 l 的直角坐标方程.
- (2)若 $\tan\alpha=2$,设直线 l 与曲线 C 的交点为点 A, B ,求 $\triangle OAB$ 的面积.
23. 已知函数 $f(x) = |2x-1| + |2x+1|$, $g(x) = |a-1| - a|x|$.
- (1)当 $x < 0$ 时,求不等式 $f(x) < 4$ 的解集.
- (2)设函数 $f(x)$ 的值域为 M ,函数 $g(x)$ 的值域为 N ,若满足 $M \cap N \neq \emptyset$,求 a 的取值范围.

答案解析

—— 数学学科 ——

第I卷

一、选择题

1. 选A. $A = \{x | 1 < x < 4\}$, $B = \{x | a-1 < x < a+1\}$.
- 因为 $B \subseteq A$,所以 $\begin{cases} a-1 \geq 1, \\ a+1 \leq 4, \end{cases}$ 即 $2 \leq a \leq 3$.
- 因为 $(2,3) \subseteq [2,3]$,所以“ $a \in (2,3)$ ”是“ $B \subseteq A$ ”的充分不必要条件.
2. 选B. $z = \frac{2+3i}{i} = 3-2i$,因此 z 的共轭复数为 $3+2i$.
3. 选B. 由 $|2a+b| = |a-2b|$ 两边平方整理,得 $3|a|^2 - 3|b|^2 + 8a \cdot b = 0$.因为 $|a| = |b| = 1$,故 $a \cdot b = 0$,所以 $\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta = 0$,即 $\cos(\alpha-\beta) = 0$,因为 $0 < \alpha < \beta < \pi$,故 $-\pi < \alpha-\beta < 0$,所以 $\alpha-\beta = -\frac{\pi}{2}$.
4. 选B. 因为 $T_{r+1} = C_6^r (ax)^{6-r} \left(\frac{\sqrt{3}}{6}\right)^r = C_6^r a^{6-r} \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{6}\right)^r x^{6-r}$,所以第二项的系数为 $C_6^1 a^5 \cdot \frac{\sqrt{3}}{6} = -\sqrt{3}$,所以 $a = -1$,

- 所以 $\int_{-2}^a x^2 dx = \int_{-2}^{-1} x^2 dx = \frac{1}{3} x^3 \Big|_{-2}^{-1} = \left(-\frac{1}{3}\right) - \left(-\frac{8}{3}\right) = \frac{7}{3}$.
5. 选D. 结合几何体的特征可得,外接球的球心为 AC 的中点,外接球半径为 $R = \frac{1}{2} \sqrt{AB^2 + BC^2} = \frac{1}{2} \sqrt{8^2 + 6^2} = 5$,则外接球的体积 $V = \frac{4}{3} \pi R^3 = \frac{500\pi}{3}$.
6. 选D. 观察各选项,其中选项A中的函数不可能在 $(0, +\infty)$ 上为增函数;选项B中的函数在 $(0, +\infty)$ 上为减函数;选项C中的函数定义域不关于原点对称,不是偶函数;选项D中的函数是偶函数,且当 $x > 0$ 时, $y=x$ 单调递增且大于零,函数 $y=e^x - e^{-x}$ 单调递增也大于零,所以 $y=x(3^x - 3^{-x})$ 在 $(0, +\infty)$ 上为增函数.
7. 选A. $x^2 + y^2 = a^2 + b^2 = c^2$,所以点 P 在以 F_1F_2 为直径的圆上,所以 $PF_1 \perp PF_2$,又 $2\angle PF_1F_2 = \angle PF_2F_1$,所以 $|PF_2| = c$, $|PF_1| = \sqrt{3}c$,又 P 在双曲线上,

所以 $\sqrt{3}c - c = 2a$, 所以 $e = \frac{c}{a} = \frac{2}{\sqrt{3}-1} = \sqrt{3} + 1$.

8. 选 D. 设 $BD = x$, 则 $AD = 3x$, $AC = 2 - 3x$, $BC = 2 - x$,
易知 $\cos \angle ADC = -\cos \angle BDC$, 由余弦定理的推论可得
- $$\frac{9x^2 + 2 - (2 - 3x)^2}{2 \times \sqrt{2} \times 3x} = \frac{x^2 + 2 - (2 - x)^2}{2 \times \sqrt{2} \times x},$$

解得 $x = \frac{1}{3}$, 故 $AD = 1$, $AC = 1$,

所以 $\cos A = \frac{AD^2 + AC^2 - CD^2}{2 \times AD \times AC} = 0$.

9. 选 A. 易证函数 $f(x)$ 是奇函数. 由题得 $f'(x) = \cos x - x \sin x - \cos x - x^2 = -x \sin x - x^2 = -x(\sin x + x)$.

所以当 $x > 0$ 时, $f'(x) < 0$, 函数在 $(0, +\infty)$ 上单调递减, 因为函数是奇函数,

所以函数在 $(-\infty, 0)$ 上单调递减,

因为 $f(2x+3) + f(1) < 0$, 所以 $f(2x+3) < -f(1) = f(-1)$, 所以 $2x+3 > -1$, 所以 $x > -2$. 故解集为 $(-2, +\infty)$.

10. 选 D. 函数 $y = -x^2 - 2$ 的图象与函数 $y = x^2 + 2$ 的图象关于原点对称,

若函数 $y = a + 2 \ln x \left(x \in \left[\frac{1}{e}, e \right] \right)$ 的图象上存在点 P ,

函数 $y = -x^2 - 2$ 的图象上存在点 Q , 且 P, Q 关于原点对称, 则函数 $y = a + 2 \ln x \left(x \in \left[\frac{1}{e}, e \right] \right)$ 的图象与函数 $y = x^2 + 2$ 的图象有交点,

即方程 $a + 2 \ln x = x^2 + 2 \left(x \in \left[\frac{1}{e}, e \right] \right)$ 有解,

即 $a = x^2 + 2 - 2 \ln x \left(x \in \left[\frac{1}{e}, e \right] \right)$ 有解,

令 $f(x) = x^2 + 2 - 2 \ln x$, 则 $f'(x) = \frac{2(x^2 - 1)}{x}$,

当 $x \in \left[\frac{1}{e}, 1 \right]$ 时, $f'(x) < 0$, 当 $x \in (1, e]$ 时, $f'(x) > 0$, 故当 $x = 1$ 时, $f(x)$ 取最小值 3,

由 $f\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{1}{e^2} + 4$, $f(e) = e^2$, 故当 $x = e$ 时, $f(x)$ 取最大值 e^2 , 故 $a \in [3, e^2]$.

11. 选 A. 由三视图可知, 该几何体是由半个圆柱与半个圆锥组合而成, 其中圆柱的底面半径为 2, 高为 4, 圆锥的底面半径和高均为 2, 其体积为 $V = \frac{1}{2} \times 4\pi \times 4 + \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times 4\pi \times 2 = \frac{28\pi}{3}$.

12. 选 D. $f(x) = \sin\left(\omega x - \frac{\pi}{6}\right)$ 的图象相邻两个对称中心之间的距离为 $\frac{\pi}{2}$, 于是有 $T = \frac{2\pi}{\omega} = 2 \times \frac{\pi}{2} = \pi$, $\omega = 2$,

所以 $f(x) = \sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right)$.

当 $2k\pi + \frac{\pi}{2} \leq 2x - \frac{\pi}{6} \leq 2k\pi + \frac{3\pi}{2}$, $k \in \mathbf{Z}$, 即 $k\pi + \frac{\pi}{3} \leq x \leq k\pi + \frac{5\pi}{6}$, $k \in \mathbf{Z}$ 时,

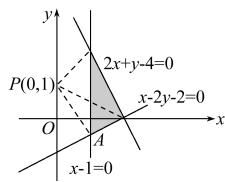
$f(x) = \sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right)$ 单调递减. 因此结合各选项知,

$f(x) = \sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right)$ 的一个单调递减区间为 $\left(\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{6}\right)$.

二、填空题

13. 【解析】作出 inequality 组表示的可行域

如图中阴影部分所示, 因为 $\frac{y-1}{x}$ 表示可行域内的点与定点 $P(0, 1)$ 连线的斜率. 由图知,



点 $P(0, 1)$ 与点 $A\left(1, -\frac{1}{2}\right)$ 连线的斜率最小, 所以

$$\left(\frac{y-1}{x}\right)_{\min} = k_{PA} = \frac{-\frac{1}{2}-1}{1-0} = -\frac{3}{2}.$$

答案: $-\frac{3}{2}$

14. 【解析】由 $a_{n+1} = 2S_n + 1$ 可得 $a_n = 2S_{n-1} + 1 (n \geq 2)$, 两式相减得 $a_{n+1} - a_n = 2a_n$, 即 $a_{n+1} = 3a_n (n \geq 2)$.

又 $a_2 = 2S_1 + 1 = 3$, 所以 $a_2 = 3a_1$, 故 $\{a_n\}$ 是首项为 1, 公比为 3 的等比数列, 所以 $a_n = 3^{n-1}$.

答案: $a_n = 3^{n-1}$

15. 【解析】由题意可知输出结果为 $S = 35$,

第 1 次循环, $S = 11, k = 9$, 第 2 次循环, $S = 20, k = 8$, 第 3 次循环, $S = 28, k = 7$, 第 4 次循环, $S = 35, k = 6$, 此时 S 满足输出结果, 退出循环, 所以判断框中的条件为: $k > 6$ 或 $k \geq 7$?

答案: $k > 6?$ 或 $k \geq 7?$

16. 【解析】在 $\triangle ABD$ 中,

因为 $\angle BAD = 90^\circ$, $\angle ABD = 45^\circ$, 所以 $\angle ADB = 45^\circ$,

所以 $AD = AB = 80$ 米, 所以 $BD = 80\sqrt{2}$ 米, 在 $\triangle ABC$ 中

$$\frac{BC}{\sin 30^\circ} = \frac{AB}{\sin 45^\circ},$$

$$\text{所以 } BC = \frac{AB \sin 30^\circ}{\sin 45^\circ} = \frac{80 \times \frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 40\sqrt{2} \text{ (米)}.$$

在 $\triangle DBC$ 中, $DC^2 = DB^2 + BC^2 - 2DB \cdot BC \cos 60^\circ$

$$= (80\sqrt{2})^2 + (40\sqrt{2})^2 - 2 \times 80\sqrt{2} \times 40\sqrt{2} \times \frac{1}{2} = 9600,$$

$$\text{所以 } DC = 40\sqrt{6} \text{ 米, 航模的速度 } v = \frac{40\sqrt{6}}{20}$$

$$= 2\sqrt{6} \text{ 米/秒}.$$

因此航模的速度为 $2\sqrt{6}$ 米/秒.

答案: $2\sqrt{6}$

三、解答题

17. 【解析】(1) 由前 3 项积为 27, 得 $a_2 = 3$, 设等比数列的公比为 q ,

由 $2a_2$ 为 $3a_1$ 和 a_3 的等差中项, 得 $3 \cdot \frac{3}{q} + 3q = 4 \times 3$, 由公比不为 1, 解得: $q = 3$,

所以 $a_n = 3^{n-1}$.

(2) 由 $b_n = b_{n-1} \cdot \log_3 a_{n+1} = b_{n-1} \cdot n$,

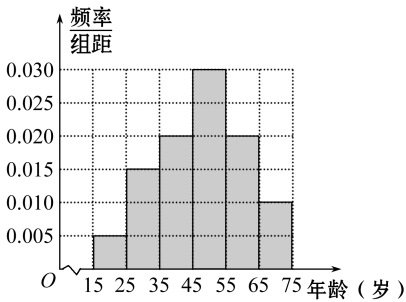
$$\text{得 } b_n = \frac{b_n}{b_{n-1}} \cdot \frac{b_{n-1}}{b_{n-2}} \cdots \frac{b_2}{b_1} \cdot b_1 = n!.$$

$$\text{令 } c_n = \frac{b_n}{b_{n+2}} = \frac{n!}{(n+2)!} = \frac{1}{(n+2)(n+1)} = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2},$$

$$\text{则 } S_n = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right)$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{n+2} = \frac{n}{2(n+2)}$$

18.【解析】(1)由题知被调查者一共有 100 人，
 所以有 $5+15+20+n+20+10=100$ ，
 所以 $n=30$ 。
 所以被调查人员年龄各组的频率组距为 0.005,0.015,
 0.020,0.030,0.020,0.010. 2 分
 所以被调查人员年龄的频率分布直方图如图所示：



..... 4 分
 (2)由(1)知，年龄在 $[45,55)$ 的共有 30 人，其中赞成的有 18 人，不赞成的有 12 人。

由分层抽样赞成者应选 $10\times\frac{3}{5}=6$ 人， 6 分
 不赞成有 4 人. 则 $\xi=0,1,2,3$ 7 分

$P(\xi=0)=\frac{C_4^3}{C_{10}^3}=\frac{4}{120}=\frac{1}{30}$, 8 分

$P(\xi=1)=\frac{C_6^1C_4^2}{C_{10}^3}=\frac{36}{120}=\frac{3}{10}$, 9 分

$P(\xi=2)=\frac{C_6^2C_4^1}{C_{10}^3}=\frac{60}{120}=\frac{1}{2}$, 10 分

$P(\xi=3)=\frac{C_6^3}{C_{10}^3}=\frac{20}{120}=\frac{1}{6}$, 11 分

所以 ξ 的分布列为

ξ	0	1	2	3
P	$\frac{1}{30}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$

..... 12 分

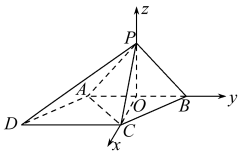
19.【解析】(1)取 AB 中点 O ，连接 AC,CO,PO ，
 因为四边形 $ABCD$ 是边长为 2 的菱形，
 所以 $AB=BC=2$ 。
 因为 $\angle ABC=60^\circ$ ，所以 $\triangle ABC$ 是等边三角形。
 所以 $CO\perp AB,OC=\sqrt{3}$ 。

因为 $PA\perp PB$ ，所以 $PO=\frac{1}{2}AB=1$ 。
 因为 $PC=2$ ，所以 $OP^2+OC^2=PC^2$ 。所以 $CO\perp PO$ 。
 因为 $AB\cap PO=O$ ，所以 $CO\perp$ 平面 PAB 。
 因为 $CO\subset$ 平面 $ABCD$ ，所以平面 $PAB\perp$ 平面 $ABCD$ 。

(2)因为 $PA=PB,O$ 为 AB 的中点
 由(1)知，平面 $PAB\perp$ 平面 $ABCD$ ，
 所以 $PO\perp$ 平面 $ABCD$ ，
 所以直线 OC,OB,OP 两两垂直。

以 O 为原点建立空间直角坐标系
 $O-xyz$ ，如图，
 则 $O(0,0,0)$ ，
 $A(0,-1,0)$ ，

$B(0,1,0),C(\sqrt{3},0,0),D(\sqrt{3},-2,0),P(0,0,1)$
 所以 $\overrightarrow{AP}=(0,1,1),\overrightarrow{PC}=(\sqrt{3},0,-1),\overrightarrow{DC}=(0,2,0)$ 。
 设平面 APC 的法向量 $\boldsymbol{m}=(x,y,z)$ ，



由 $\begin{cases} \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{AP}=0, \\ \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{PC}=0, \end{cases}$ 得 $\begin{cases} y+z=0, \\ \sqrt{3}x-z=0, \end{cases}$
 取 $x=1$ ，得 $\boldsymbol{m}=(1,-\sqrt{3},\sqrt{3})$ ，
 设平面 PCD 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$ ，
 由 $\begin{cases} \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{PC}=0, \\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{DC}=0, \end{cases}$ 得 $\begin{cases} \sqrt{3}x-z=0, \\ 2y=0, \end{cases}$
 取 $x=1$ ，得 $\boldsymbol{n}=(1,0,\sqrt{3})$ ，
 所以 $\cos\langle\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}\rangle=\frac{\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{m}||\boldsymbol{n}|}=\frac{2\sqrt{7}}{7}$ ，
 由图可知二面角 $A-PC-D$ 为锐二面角。
 所以二面角 $A-PC-D$ 的余弦值为 $\frac{2\sqrt{7}}{7}$ 。

20.【解析】(1)因为 $\triangle MNF_2$ 的周长为 8，所以 $4a=8$ ，所以 $a=2$ 。又因为 $\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{3}}{2}$ ，所以 $c=\sqrt{3}$ ，所以 $b=\sqrt{a^2-c^2}=1$ ，
 所以椭圆 C 的标准方程为 $\frac{y^2}{4}+x^2=1$ 。

(2)将直线的方程 $y=kx+m$ 代入到椭圆方程 $\frac{y^2}{4}+x^2=1$ 中，得 $(4+k^2)x^2+2kmx+m^2-4=0$ 。
 由直线与椭圆仅有一个公共点，
 知 $\Delta=4k^2m^2-4(4+k^2)(m^2-4)=0$ ，化简得 $m^2=4+k^2$ 。

设 $d_1=|F_1M'|=\frac{|-\sqrt{3}+m|}{\sqrt{k^2+1}},d_2=|F_2N'|=\frac{|\sqrt{3}+m|}{\sqrt{k^2+1}}$ ，
 所以 $d_1^2+d_2^2=\left(\frac{m-\sqrt{3}}{\sqrt{k^2+1}}\right)^2+\left(\frac{m+\sqrt{3}}{\sqrt{k^2+1}}\right)^2$
 $=\frac{2(m^2+3)}{k^2+1}=\frac{2(k^2+7)}{k^2+1}$ ，

$d_1d_2=\frac{|-\sqrt{3}+m|}{\sqrt{k^2+1}}\cdot\frac{|\sqrt{3}+m|}{\sqrt{k^2+1}}=\frac{|m^2-3|}{k^2+1}=1$ ，
 所以 $|M'N'|=\sqrt{|F_1F_2|^2-(d_1-d_2)^2}$
 $=\sqrt{12-(d_1^2+d_2^2-2d_1d_2)}=\sqrt{\frac{12k^2}{k^2+1}}$ 。

因为四边形 $F_1M'N'F_2$ 的面积
 $S=\frac{1}{2}|M'N'|(d_1+d_2)$ ，

所以 $S^2=\frac{1}{4}\times\frac{12k^2}{k^2+1}\times(d_1^2+d_2^2+2d_1d_2)$
 $=\frac{3k^2(4k^2+16)}{(k^2+1)^2}$ 。

令 $k^2+1=t(t\geq 1)$ ，则
 $S^2=\frac{3(t-1)[4(t-1)+16]}{t^2}=\frac{12(t-1)(t+3)}{t^2}$
 $=\frac{12(t^2+2t-3)}{t^2}$
 $=12+12\left[-3\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{3}\right)^2+\frac{1}{3}\right]$ ，
 所以当 $\frac{1}{t}=\frac{1}{3}$ 时， S^2 取得最大值为 16，故 $S_{\max}=4$ ，即四边形 $F_1M'N'F_2$ 面积的最大值为 4。

21.【解析】(1) $f'(x)=\frac{1}{x}+a,x\in(0,+\infty)$ 。
 ①当 $a\geq 0$ 时， $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增；
 ②当 $a<0$ 时， $f(x)$ 在 $\left(0,-\frac{1}{a}\right)$ 上单调递增，在 $\left(-\frac{1}{a},+\infty\right)$ 上单调递减。

(2) 当 $a=1$ 时, $g(x)=\ln x+\frac{1}{2x}-m$,

由已知, 得 $\ln x_1+\frac{1}{2x_1}=m, \ln x_2+\frac{1}{2x_2}=m$,

两式相减, 得

$$\ln \frac{x_1}{x_2} + \frac{1}{2x_1} - \frac{1}{2x_2} = 0 \Rightarrow x_1 \cdot x_2 = \frac{x_1 - x_2}{2 \ln \frac{x_1}{x_2}},$$

$$\text{所以 } x_1 = \frac{\frac{x_1}{x_2} - 1}{2 \ln \frac{x_1}{x_2}}, x_2 = \frac{1 - \frac{x_2}{x_1}}{2 \ln \frac{x_1}{x_2}}$$

$$\text{所以 } x_1 + x_2 = \frac{\frac{x_1}{x_2} - \frac{x_2}{x_1}}{2 \ln \frac{x_1}{x_2}}, \text{ 令 } t = \frac{x_1}{x_2} \in (0, 1),$$

$$\text{设 } h(t) = t - \frac{1}{t} - 2 \ln t,$$

$$\text{所以 } h'(t) = 1 + \frac{1}{t^2} - \frac{2}{t} = \frac{t^2 - 2t + 1}{t^2} > 0,$$

所以 $h(t)$ 在 $(0, 1)$ 上单调递增,

$$\text{所以 } h(t) < h(1) = 0, \text{ 即 } t - \frac{1}{t} < 2 \ln t.$$

又因为 $\ln t < 0$,

$$\text{所以 } \frac{t - \frac{1}{t}}{2 \ln t} > 1, \text{ 所以 } x_1 + x_2 > 1.$$

22. 【解析】(1) 由 $x = \rho \cos \theta, y = \rho \sin \theta$ 可得曲线 C 的直角坐标方程为 $x^2 + y^2 - 2x - 4y + 4 = 0$, 即 $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 1$,

$\begin{cases} x = 1 + t \cos \alpha, \\ y = 2 + t \sin \alpha \end{cases}$ 消去参数 t , 可得 $y = \tan \alpha (x-1)$. 设 $k = \tan \alpha$, 则直线 l 的方程为 $y = k(x-1)$,

由题意, 得圆心 $(1, 2)$ 到直线 l 的距离 $d_1 = \frac{|k-2-k|}{\sqrt{k^2+1}} =$

1, 解得 $k = \pm\sqrt{3}$,

所以直线 l 的直角坐标方程为 $y = \pm\sqrt{3}(x-1)$.

(2) 因为 $\tan \alpha = 2$,

所以直线 l 的方程为 $2x - y - 2 = 0$,

原点到直线 l 的距离 $d_2 = \frac{2}{\sqrt{5}}$,

$$\text{联立 } \begin{cases} 2x - y - 2 = 0, \\ (x-1)^2 + (y-2)^2 = 1, \end{cases}$$

$$\text{解得 } \begin{cases} x = 2, \\ y = 2 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x = \frac{8}{5}, \\ y = \frac{6}{5} \end{cases},$$

$$\text{所以 } |AB| = \sqrt{\left(2 - \frac{8}{5}\right)^2 + \left(2 - \frac{6}{5}\right)^2} = \frac{2}{\sqrt{5}}, \text{ 所以 } S = \frac{1}{2} \times \frac{2}{\sqrt{5}} \times \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2}{5}.$$

23. 【解析】(1) 当 $x < 0$ 时, $2x - 1 < 0$, 所以 $f(x) < 4$ 可化为 $|2x+1| - 2x < 3$. ①

当 $x \leq -\frac{1}{2}$ 时, ①化为 $-2x - 1 - 2x < 3$, 解得 $x > -1$,

此时 $-1 < x \leq -\frac{1}{2}$.

当 $-\frac{1}{2} < x < 0$ 时, ①化为 $2x + 1 - 2x < 3$, 解得 $x \in \mathbf{R}$,

此时 $-\frac{1}{2} < x < 0$.

综上, 原不等式的解集是 $\{x | -1 < x < 0\}$.

(2) 因为 $f(x) = |2x-1| + |2x+1|$
 $\geq |(2x-1) - (2x+1)| = 2$,

所以 $f(x)$ 的值域为 $[2, +\infty)$.

当 $a \geq 0$ 时, 因为 $|x| \geq 0$, 所以 $g(x)$ 的值域为 $(-\infty, |a-1|]$.

若 $M \cap N \neq \emptyset$, 则 $|a-1| \geq 2$, 解得 $a \leq -1$ 或 $a \geq 3$. 从而 $a \geq 3$.

当 $a < 0$ 时, 因为 $|x| \geq 0$, 所以 $g(x)$ 的值域为 $[|a-1|, +\infty)$, 此时一定满足 $M \cap N \neq \emptyset$. 从而 $a < 0$. 综上, a 的取值范围是 $(-\infty, 0) \cup [3, +\infty)$.