

# 数学试题

时 间：120 分钟

满 分：150 分

命题人：田秀林

审题人：刘婷

## 第 I 卷（客观题）共 60 分

一、选择题：本大题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个备选项中，只有一项是符合题目要求的。

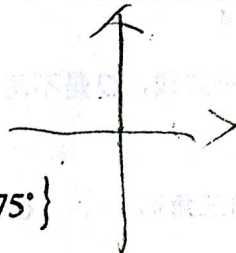
1. 与  $-75^\circ$  终边相同的角的集合是 ( ) ( $k \in \mathbb{Z}$ )

A.  $\{\alpha | \alpha = k \cdot 180^\circ - 75^\circ\}$

B.  $\{\alpha | \alpha = k \cdot 90^\circ - 75^\circ\}$

C.  $\{\alpha | \alpha = k \cdot 360^\circ + 75^\circ\}$

D.  $\{\alpha | \alpha = k \cdot 360^\circ + 285^\circ\}$



2.  $\cos 43^\circ \cos 77^\circ - \sin 43^\circ \sin 77^\circ =$  ( )

A.  $\frac{1}{2}$

B.  $-\frac{1}{2}$

C.  $\frac{\sqrt{3}}{2}$

D.  $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

3. 在  $\triangle ABC$  中,  $a=3$ ,  $b=\sqrt{3}$ ,  $A=60^\circ$ , 那么  $B$  等于 ( )

A.  $30^\circ$

B.  $60^\circ$

C.  $30^\circ$  或  $150^\circ$

D.  $60^\circ$  或  $120^\circ$

4. 已知  $\vec{a}=(1,3)$ ,  $\vec{b}=(n,1)$ , 若  $|\vec{a}+\vec{b}|=\vec{a} \cdot \vec{b}$ , 则  $n$  的值为 ( )

A. -3

B. 2

C.  $\frac{1}{6}$

D. 2

5. 在  $\triangle ABC$  中,  $\tan A + \tan B + \sqrt{3} = \sqrt{3} \tan A \tan B$ , 则角  $C$  等于 ( )

A.  $\frac{\pi}{3}$

B.  $\frac{2\pi}{3}$

C.  $\frac{\pi}{6}$

D.  $\frac{\pi}{4}$

6. 设  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  是不共线的两个向量, 已知  $\overrightarrow{BA} = \vec{a} + 2\vec{b}$ ,  $\overrightarrow{BC} = 4\vec{a} - 4\vec{b}$ ,  $\overrightarrow{CD} = -\vec{a} + 2\vec{b}$ , 则 ( )

A. A, B, D 三点共线

B. B, C, D 三点共线

C. A, B, C 三点共线

D. A, C, D 三点共线

7. 设  $a = \frac{\sqrt{2}}{2}(\sin 17^\circ + \cos 17^\circ)$ ,  $b = 2\cos^2 13^\circ - 1$ ,  $c = \frac{1 + \tan 15^\circ}{2 - 2\tan 15^\circ}$ , 则 ( )

A.  $c < a < b$

B.  $b < c < a$

C.  $a < b < c$

D.  $b < a < c$

8. 已知  $\triangle ABC$  中,  $A, B, C$  的对边分别为  $a, b, c$ , 三角形的重心为  $G$ ,  $a\overrightarrow{GA} + b\overrightarrow{GB} + c\overrightarrow{GC} = \vec{0}$ , 则  $A =$  ( )

- A.  $30^\circ$                       B.  $60^\circ$                       C.  $90^\circ$                       D.  $120^\circ$

9. 已知  $\vec{a} = (-3, 2)$ ,  $\vec{b} = (-1, 0)$ , 向量  $\lambda\vec{a} + \vec{b}$  与  $\vec{a} - 2\vec{b}$  垂直, 则实数  $\lambda$  的值为 ( )

- A.  $-\frac{1}{7}$                       B.  $\frac{1}{7}$                       C.  $-\frac{1}{6}$                       D.  $\frac{1}{6}$

10. 若两个非零向量  $\vec{a}, \vec{b}$  满足  $|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a} - \vec{b}| = 2|\vec{a}|$ , 则向量  $\vec{a} + \vec{b}$  与  $\vec{a} - \vec{b}$  的夹角为 ( )

- A.  $\frac{\pi}{6}$                       B.  $\frac{\pi}{4}$                       C.  $\frac{2\pi}{3}$                       D.  $\frac{5\pi}{6}$

11. 已知平面上  $A, B, C$  三点不共线,  $O$  是不同于  $A, B, C$  的任意一点, 若  $(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC}) \cdot (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) = 0$ , 则  $\triangle ABC$  是 ( )

- A. 等腰三角形                      B. 直角三角形                      C. 等腰直角三角形                      D. 等边三角形

12. 已知  $D$  是  $\triangle ABC$  边  $BC$  延长线上一点, 记  $\overrightarrow{AD} = \lambda\overrightarrow{AB} + (1 - \lambda)\overrightarrow{AC}$ . 若关于  $x$  的方程

$2\sin^2 x - (\lambda + 1)\sin x + 1 = 0$  在  $[0, 2\pi)$  上恰有两解, 则实数  $\lambda$  的取值范围是 ( )

- A.  $\lambda < -2$                       B.  $\lambda < -4$                       C.  $\lambda = -2\sqrt{2} - 1$                       D.  $\lambda < -4$  或  $\lambda = -2\sqrt{2} - 1$

二、填空题: 本大题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分, 把答案填写在答题卡相应位置上.

13. 已知  $\cos \alpha = 0$ ,  $\alpha \in [0, 2\pi]$ , 则  $\alpha =$  \_\_\_\_\_

14. 在  $\triangle ABC$  中,  $B = 135^\circ$ ,  $C = 15^\circ$ ,  $a = 5$ , 则此三角形的最大边长为 \_\_\_\_\_.

15.  $\frac{1}{\tan 70^\circ} + 4 \cos 70^\circ$  的值是 \_\_\_\_\_

16. 平面上的向量  $\overrightarrow{MA}$  与  $\overrightarrow{MB}$  满足  $|\overrightarrow{MA}|^2 + |\overrightarrow{MB}|^2 = 4$ , 且  $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$ , 若点  $C$  满足  $\overrightarrow{MC} = \frac{1}{3}\overrightarrow{MA} + \frac{2}{3}\overrightarrow{MB}$ , 则  $|\overrightarrow{MC}|$  的最小值为 \_\_\_\_\_.

三、解答题: 本大题共 6 小题, 共 70 分, 请把解答过程书写在答题卡相应位置.

17. (本小题 10 分) 已知向量  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  满足:  $|\vec{a}| = 1$ ,  $|\vec{b}| = 6$ ,  $\vec{a} \cdot (\vec{b} - \vec{a}) = 2$ .

(1) 求向量  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  的夹角;

(2) 求  $|\vec{a} - 2\vec{b}|$ .

18. (本小题 12 分) 设函数  $f(x) = \sqrt{3} \sin x \cos x + \cos^2 x$

(1) 求函数  $f(x)$  的周期.

(2) 求函数  $f(x)$  的最值, 且说明什么时候取到最值.

19. (本小题 12 分) 已知函数  $f(x) = 2 \sin(\omega x + \varphi)$  ( $\omega > 0, |\varphi| < \frac{\pi}{2}$ ) 的图像与直线  $y = 2$  两相邻交点之间的距离为  $\pi$ , 且图像关于  $x = \frac{\pi}{3}$  对称.  $2 \sin(2x + \varphi)$

(1) 求  $y = f(x)$  的解析式;

(2) 先将函数  $f(x)$  的图象向左平移  $\frac{\pi}{6}$  个单位, 再将图象上所有横坐标伸长到原来的 2 倍, 得到函数  $g(x)$  的图象, 求  $g(x)$  的单调递增区间以及  $g(x) \geq \sqrt{3}$  的  $x$  取值范围.

$$2 \times \frac{\pi}{3} + \varphi = k\pi + \frac{\pi}{2} \quad \frac{\pi}{2} + (k\pi) = \frac{\pi}{2}$$

$$\varphi = k\pi - \frac{\pi}{3} \quad |\varphi| < \frac{\pi}{2}$$

20. (本小题 12 分) 已知  $\alpha, \beta \in \left(\frac{3\pi}{4}, \pi\right)$ ,  $\sin(\alpha + \beta) = -\frac{3}{5}$ ,  $\sin\left(\beta - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{3\sqrt{10}}{10}$ .

(1) 求  $\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right)$  的值;

(2) 求  $\sin 2\alpha$  的值.

$$\cos(\alpha + \beta) = \frac{4}{5}$$

$$\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

21. (本小题 12 分) 在  $\triangle ABC$  中, 内角  $A, B, C$  的对边分别为  $a, b, c$ , 已知  $\vec{m} = (c - 2b, a)$ ,

$\vec{n} = (\cos A, \cos C)$ , 且  $\vec{m} \perp \vec{n}$ .

(1) 求  $A$  的大小;

(2) 若  $a = \sqrt{3}$ ,  $b + c = 3$ , 求  $\triangle ABC$  的面积.

$$\begin{aligned} c^2 - 2bc - a \cos A &= 0 \\ -a \cos A &= -c^2 + 2bc + a \\ \cos A &= \end{aligned}$$

22. (本小题 12 分) 已知向量  $\vec{a} = (2 \cos(-\theta), 2 \sin(-\theta))$ ,  $\vec{b} = (\cos(90^\circ - \theta), \sin(90^\circ - \theta))$ .

(1) 求证:  $\vec{a} \perp \vec{b}$ ;

(2) 若存在不等于 0 的实数  $k$  和  $t$ , 使  $\vec{x} = \vec{a} + (t^2 - 3)\vec{b}$ ,  $\vec{y} = -k\vec{a} + t\vec{b}$ , 满足  $\vec{x} \perp \vec{y}$ , 试求此时  $\frac{k + t^2}{t}$

的最小值.