

高二数学文科第 20 次周考试卷

参考公式: 1. 独立性检验临界值

$P(K^2 \geq k_0)$	0.40	0.25	0.15	0.10	0.05	0.025	0.010	0.005	0.001
k_0	0.708	1.323	2.072	2.706	3.841	5.024	6.635	7.879	10.828

2. 直线方程 $\hat{y} = bx + a$, 其中 $b = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i - n\bar{x}\bar{y}}{\sum_{i=1}^n x_i^2 - n\bar{x}^2}$, $a = \bar{y} - b\bar{x}$

一、选择题 (本大题共 12 小题, 每小题 5 分, 共 60 分)

1. 若 $(x^2 - 1) + (x^2 + 3x + 2)i$ 是纯虚数, 则实数 x 的值是 ()

- A. -1 B. 1 C. ± 1 D. -1 或 -2

2. 复数集是由实数集和虚数集构成的, 而实数集又可分为有理数集和无理数集两部分; 虚数集也可分为纯虚数集和非纯虚数集两部分, 则可选用 () 来描述之.

- A. 流程图 B. 结构图
C. 流程图或结构图中的任意一个 D. 流程图和结构图同时用

3. 复数 $z = \frac{1-2ai}{2i}$ 的模为 1, 则 a 的值为 () A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ B. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ C. $\pm \frac{\sqrt{3}}{2}$ D. $\frac{3}{4}$

4. 归纳推理和类比推理的相似之处为 ()

- A. 都是从一般到一般 B. 都是从一般到特殊
C. 都是从特殊到特殊 D. 所有结论都不正确

5. 数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1=1$, S_n 表示前 n 项和, 且 $S_n, S_{n+1}, 2S_1$ 成等差数列, 通过计算 S_1, S_2, S_3 ,

猜想当 $n \geq 1$ 时, $S_n =$ () A. $\frac{2^n + 1}{2^{n-1}}$ B. $\frac{2^n - 1}{2^{n-1}}$ C. $\frac{n(n+1)}{2^n}$ D. $1 - \frac{1}{2^{n-1}}$

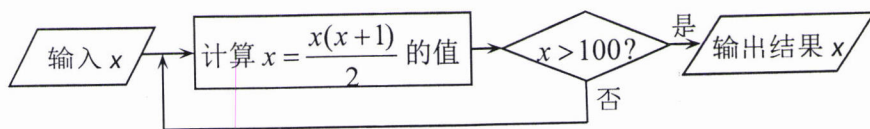
6. 函数 $y = \log_a(x+3) - 1$ ($a > 0$ 且 $a \neq 1$) 的图象恒过定点 A, 若点 A 在直线 $mx + ny + 1 = 0$ 上,

其中 $mn > 0$, 则 $\frac{1}{m} + \frac{2}{n}$ 的最小值为 () A. 2 B. 4 C. 8 D. 16

7. 已知一系列样本点 $(x_i, y_i) (i = 1, 2, 3, \dots, n)$ 的回归直线方程为 $\hat{y} = 2x + a$, 若样本点 $(r, 1)$

与 $(1, s)$ 的残差相同, 则有 () A. $r=s$ B. $s=2r$ C. $s=-2r+3$ D. $s=2r+1$

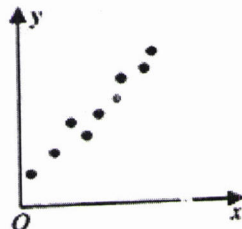
8. 按流程图的程序计算, 若开始输入的值为 $x=3$, 则输出的 x 的值是 ()



- A. 6 B. 21 C. 156 D. 231

9. 已知变量 x 与 y 呈相关关系, 且由观测数据得到的样本数据散点图如图所示, 则由该观测数据算得的回归方程可能是 ()

- A. $\hat{y} = -1.314x + 1.520$ B. $\hat{y} = 1.314x + 1.520$
 C. $\hat{y} = 1.314x - 1.520$ D. $\hat{y} = -1.314x - 1.520$



10. 已知 $z_1, z_2 \in C, |z_1 + z_2| = 2\sqrt{2}, |z_1| = \sqrt{3}, |z_2| = \sqrt{2}$, 则 $|z_1 - z_2|$ 等于 ()

- A. 1 B. $\frac{1}{2}$ C. 2 D. $\sqrt{2}$

11. 在研究某新措施对“非典”的防治效果问题时, 得到如下列联表:

	存活数	死亡数	合计
新措施	132	18	150
对照	114	36	150
合计	246	54	300

由表中数据可得 $k^2 = 7.317$, 故我们由此认为“新措施对防治非典有效”的把握为 ()

- A. 0 B. 95% C. 99% D. 100%

12. 给出命题: 若 a, b 是正常数, 且 $a \neq b, x, y \in (0, +\infty)$, 则 $\frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y} \geq \frac{(a+b)^2}{x+y}$ (当且仅当

$\frac{a}{x} = \frac{b}{y}$ 时等号成立). 根据上面命题, 可以得到函数 $f(x) = \frac{2}{x} + \frac{9}{1-2x}$ ($x \in (0, \frac{1}{2})$) 的最小值及

取最小值时的 x 值分别为 () A. $11+6\sqrt{2}, \frac{2}{13}$ B. $11+6\sqrt{2}, \frac{1}{5}$ C. 5, $\frac{2}{13}$ D. 25, $\frac{1}{5}$

二、 填空题 (本大题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分. 把答案写在题中横线上.)

13. 已知复数 $z = (1-i)^2 + 1 + 3i, z^2 + az + b = 1-i, a, b \in R$, 则实数对 (a, b) 的值为__.

14. 某天, 小赵、小张、小李、小王四人一起到电影演看电影, 他们到达电影院之后发现, 当天正在放映 A, B, C, D, E 五部影片, 于是他们商量一起看其中一部影片:

小赵说:只要不是 B 就行;

小张说:B,C,D,E 都行;

小李说:我喜欢 D, 但是只要不是 C 就行; 小王说:除了 E 之外, 其他的都可以.

据此判断, 他们四人可以共同看的影片为_____.

15. 研究两个变量的相关关系时, 观察散点图发现样本点集中于一条指数曲线 $y=e^{kx+a}$ 的周围, 令 $z=\ln y$, 求得回归直线方程为 $\hat{z}=0.25x-2.58$, 则该模型的回归方程为_____.

16. 在平面几何中有: $Rt\triangle ABC$ 的直角边分别为 a, b , 斜边上的高为 h , 则 $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} = \frac{1}{h^2}$.

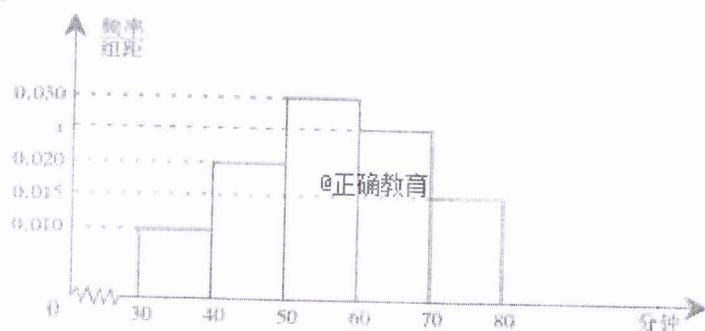
类比这一结论, 在三棱锥 $P-ABC$ 中, PA, PB, PC 两两互相垂直, 且 $PA=a, PB=b, PC=c$, 此三棱锥 $P-ABC$ 的高为 h , 则结论为_____.

三、解答题 (本大题共 6 小题, 17 题 10 分, 18 题—22 题每题 12 分, 共 70 分.)

17. (1) 已知复数 $(1-i)(a+i)$ 在复平面内对应的点在第二象限, 求实数 a 的取值范围;

(2) 已知 m 为实数, 并且 $\frac{1+mi}{2-i} + \frac{1}{2}$ 的实部与虚部相等, 求 m .

18. 4 月 23 日是“世界读书日”, 某中学在此期间开展了一系列的读书教育活动, 为了解本校学生课外阅读情况, 学校随机抽取了 100 名学生对其课外阅读时间进行调查, 下面是根据调查结果绘制的学生日均课外阅读时间 (单位: 分钟) 的频率分布直方图, 若将日均课外阅读时间不低于 60 分钟的学生称为“读书迷”, 低于 60 分钟的学生称为“非读书迷”



(1) 求 x 的值并估计全校 3000 名学生中读书迷大概有多少?

(2) 根据已知条件完成下面 2×2 的列联表, 并据此判断是否有 99% 的把握认为

“读书迷”与性别有关? 附: $k^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$ $n = a+b+c+d$

	非读书迷	读书迷	合计
男		15	
女			45
合计			

19. 已知 i 是虚数单位，复数 z 的共轭复数是 \bar{z} ，且满足 $z + 2\bar{z} = \frac{5+i}{1+i}$.

(I) 求复数 z 的模 $|z|$;

(II) 若复数 $z(2 - mi)$ 在复平面内对应的点在第一象限，求实数 m 的取值范围.

20. 某年青教师近五年内所带班级的数学平均成绩统计数据如下:

年份 x 年	2009	2010	2011	2012	2013
平均成绩 y 分	97	98	103	108	109

(1) 利用所给数据，求出平均分与年份之间的回归直线方程 $\hat{y} = bx + a$ ，并判断它们之间是正相关还是负相关;

(2) 利用 (1) 中所求出的直线方程预测该教师 2014 年所带班级的数学平均成绩。

21. 已知复数 $z = (m-1)(m+2) + (m-1)i$ ($m \in R$, i 为虚数单位)

(1) 若是纯虚数, 求实数 m 的值;

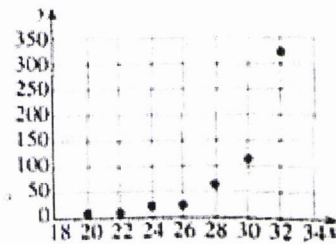
(2) 若 $m = 2$, 设 $\frac{z+i}{z-1} = a + bi$ ($a, b \in R$), 试求 $a + b$.

22. 为了研究一种昆虫的产卵数 y 和温度 x 是否有关, 现收集了 7 组观测数据列于下表中, 并作出了散点图, 发现样本点并没有分布在某个带状区域内, 两个变量并不呈线性相关关系, 现分别用模型①: $y = C_1x^2 + C_2$ 与模型②: $y = e^{C_3x + C_4}$ 作为产卵数 y 和温度 x 的回归方程来建立两个变量之间的关系.

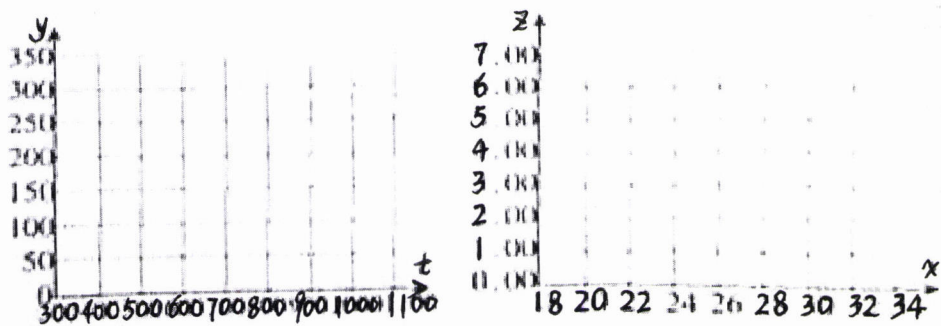
温度 $x/^\circ C$	20	22	24	26	28	30	32
产卵数 y / 个	6	10	21	24	64	113	322
$t = x^2$	400	484	576	676	784	900	1024
$z = \ln y$	1.79	2.30	3.04	3.18	4.16	4.73	5.77

\bar{x}	\bar{t}	\bar{y}	\bar{z}
26	692	80	3.57
$\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}$	$\frac{\sum_{i=1}^n (t_i - \bar{t})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^n (t_i - \bar{t})^2}$	$\frac{\sum_{i=1}^n (z_i - \bar{z})(x_i - \bar{x})}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}$	$\frac{\sum_{i=1}^n (z_i - \bar{z})(t_i - \bar{t})}{\sum_{i=1}^n (t_i - \bar{t})^2}$
1157.54	0.43	0.32	0.00012

其中 $t_i = x_i^2$, $\bar{t} = \sum_{i=1}^n t_i$, $z_i = \ln y_i$, $\bar{z} = \sum_{i=1}^n z_i$,



(1) 在答题卡中分别画出 y 关于 t 的散点图、 z 关于 x 的散点图，根据散点图判断哪一个模型更适宜作为回归方程类型？（给出判断即可，不必说明理由）。



(2) 根据表中数据，分别建立两个模型下建立 y 关于 x 的回归方程；并在两个模型下分别估计温度为 30°C 时的产卵数。（ C_1, C_2, C_3, C_4 与估计值均精确到小数点后两位）

（参考数据： $e^{4.65} \approx 104.58$, $e^{4.85} \approx 127.74$, $e^{5.05} \approx 156.02$ ）

高二数学文科第 20 次周考答案

1-5 BBCDB

6-10 C C D B D

11-12 CD

13. (-3,4)

14. D

15. $y = e^{0.25x-2.58}$

16. $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = \frac{1}{h^2}$. 解析: $\because PA, PB, PC$ 两两互相垂直, $\therefore PA \perp$ 平面 PBC . 由已知

有: $PD = \frac{bc}{\sqrt{b^2+c^2}}$, $h = PO = \frac{a \cdot PD}{\sqrt{a^2+PD^2}}$. $\therefore h^2 = \frac{a^2 b^2 c^2}{a^2 b^2 + b^2 c^2 + c^2 a^2}$ 即 $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = \frac{1}{h^2}$.

17. (1) $\because (1-i)(a+i) = a+i-ai-i^2 = (a+1) + (1-a)i$ 在实轴上.

$$\therefore \begin{cases} a+1 < 0 \\ 1-a > 0 \end{cases} \therefore \begin{cases} a < -1 \\ a < 1 \end{cases} \therefore a < -1$$

(2) $\because \frac{1+mi}{2-i} + \frac{1}{2} = \frac{(1+mi)(2+i)}{(2-i)(2+i)} + \frac{1}{2} = \frac{2+i+2mi-m}{5} + \frac{1}{2}$

$$= \left(\frac{2-m}{5} + \frac{1}{2}\right) + \frac{(2m+1)i}{5}$$

$$\therefore \frac{2-m}{5} + \frac{1}{2} = \frac{2m+1}{5} \quad \therefore m = \frac{7}{6}$$

18. 解: (1) 由已知可得: $(0.01+0.02+0.03+x+0.015) \times 10 = 1$, 可得 $x = 0.025, \dots$
因为 $(0.025+0.015) \times 10 = 0.4$, 将频率视为概率,

由此可以估算出全校 3000 名学生中读书迷大概有 1200 人;

(2) 完成下面的 2×2 列联表如下

	非读书迷	读书迷	合计
男	40	15	55
女	20	25	45
合计	60	40	100

$$K^2 = \frac{100(40 \times 25 - 15 \times 20)^2}{60 \times 40 \times 55 \times 45} \approx 8.249,$$

$$8.249 > 6.635,$$

故有 99% 的把握认为“读书迷”与性别有关.

19. 详解: (I) 设复数 $z = x + yi (x, y \in R)$, 则 $\bar{z} = x - yi$,

于是 $x + yi + 2(x - yi) = \frac{(5+i)(1-i)}{(1+i)(1-i)}$, 即 $3x - yi = 3 - 2i$,

所以 $\begin{cases} 3x = 3 \\ -y = -2 \end{cases}$, 解得 $\begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases}$, 故 $z = 1 + 2i$.

(II) 由 (I) 得 $z(2 - mi) = (1 + 2i)(2 - mi) = (2 + 2m) + (4 - m)i$,

由于复数 $z(2 - mi)$ 在复平面内对应的点在第一象限,

所以 $\begin{cases} 2 + 2m > 0 \\ 4 - m > 0 \end{cases}$, 解得 $-1 < m < 4$.

20. (1) (8分) 解: $\bar{x} = 2011$ $\bar{y} = 103$

$$b = \frac{(-2)(-6) + (-1)(-5) + 0 \times 0 + 1 \times 5 + 2 \times 6}{(-2)^2 + 1^2 + 0^2 + 1^2 + 2^2} = 3.4$$

$$a = 103 - 3.4 \times 2011 = -6734.4$$

$$\therefore b > 0$$

\therefore 成绩与年份成正相关关系

$$\therefore \hat{y} = 3.4x - 6734.4$$

$$(2) y = 3.4x - 6734.4 = 3.4 \times 2014 - 6734.4 = 113.2$$

所以预测 2014 年该班的数学平均成绩为 113.2 分

21. (I) 若是纯虚数, 则 $\begin{cases} (m-1)(m+2) = 0 \\ m-1 \neq 0 \end{cases}$, $\begin{cases} (m-1)(m+2) = 0 \\ m-1 \neq 0 \end{cases}$,

解得 $m = -2$.

(II) 若 $m = 2$, 则 $z = 4 + i$.

$$\therefore a + bi = \frac{4+i+i}{4+i-1} = \frac{4+2i}{3+i} = \frac{(4+2i)(3-i)}{(3+i)(3-i)} = \frac{7}{5} + \frac{1}{5}i \quad a + bi = \frac{4+i+i}{4+i-1} = \frac{4+2i}{3+i} =$$

$$\frac{(4+2i)(3-i)}{(3+i)(3-i)} =$$

$$\frac{7}{5} + \frac{1}{5}i,$$

$$\therefore a = \frac{7}{5}, \quad b = \frac{1}{5}, \quad \therefore a + b = \frac{8}{5}.$$

22. (1) 画出 y 关于 t 的散点图如图 1,

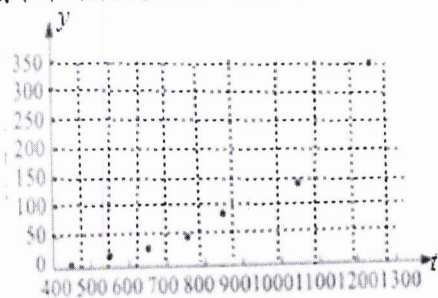


图1 温度的平方

画出 z 关于 x 的散点图如图 2;

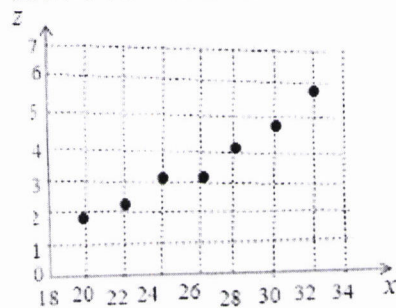


图2

根据散点图可以判断模型②更适宜作为回归方程类型;

(2) 对于模型①: 设 $t = x^2$, 则 $y = C_1 x^2 + C_2 = C_1 t + C_2$,

$$\text{其中 } C_1 = \frac{\sum_{i=1}^7 (t_i - \bar{t})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^7 (t_i - \bar{t})^2} = 0.43,$$

$$C_2 = \bar{y} - C_1 \bar{t} = 80 - 0.43 \times 692 = -217.56,$$

$$\text{所以 } y = 0.43x^2 - 217.56.$$

$$\text{当 } x = 30 \text{ 时, 估计产卵数为 } y = 0.43 \times 30^2 - 217.56 = 169.44.$$

对于模型②: 设 $z = \ln y$, 则 $z = C_3 x + C_4$,

$$\text{其中 } C_3 = \frac{\sum_{i=1}^7 (z_i - \bar{z})(x_i - \bar{x})}{\sum_{i=1}^7 (x_i - \bar{x})^2} = 0.32,$$

$$C_4 = \bar{z} - C_3 \bar{x} = 3.57 - 0.32 \times 26 = -4.75,$$

$$\text{所以 } z = 0.32x - 4.75, \text{ 则 } y = e^{0.32x - 4.75}.$$

$$\text{当 } x = 30 \text{ 时, 估计产卵数为 } y = e^{0.32 \times 30 - 4.75} = e^{4.85} \approx 127.74.$$