

2019 年下学期长沙市雷锋学校高二入学考试

数学试卷

(考试时间: 90 分钟 满分: 100 分)

班级 _____ 姓名 _____ 考号 _____

一、选择题 (每小题 5 分, 共 40 分, 每小题只有一项是符合要求.)

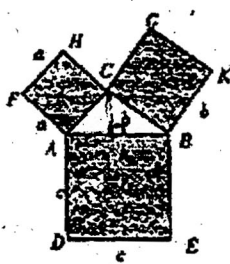
1. 已知向量 $\vec{a}=(3,4)$, $\vec{b}=(2,1)$, 则向量 \vec{a} 与 \vec{b} 夹角的余弦值为 ().

- A. $\frac{2\sqrt{5}}{5}$ B. $-\frac{\sqrt{5}}{5}$ C. $\frac{2\sqrt{5}}{25}$ D. $\frac{11\sqrt{5}}{25}$

2. 已知 $\tan \alpha = -\frac{1}{3}$, 则 $\frac{\sin 2\alpha - \cos^2 \alpha}{1 + \cos 2\alpha}$ 的值为 ().

- A. $-\frac{5}{3}$ B. $-\frac{5}{6}$ C. $-\frac{1}{6}$ D. $-\frac{3}{2}$

3. 如图所示的是希腊著名数学家欧几里德在证明勾股定理时所绘制的一个图形, 该图形由三个边长分别为 a, b, c 的正方形和一个直角三角形围成, 现已知 $a=3, b=4$, 若从该图形中随机取一点, 则该点取自其中的阴影部分的概率为 ().



- A. $\frac{17}{28}$ B. $\frac{25}{56}$ C. $\frac{25}{28}$ D. $\frac{16}{25}$

4. 已知 $a = \log_3 \frac{7}{2}$, $b = (\frac{1}{4})^{\frac{1}{3}}$, $c = \log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{5}$, 则 a, b, c 的大小关系为 ().

- A. $a > b > c$ B. $b > a > c$ C. $c > b > a$ D. $c > a > b$

5. 甲、乙两名同学在 5 次数学考试中, 成绩统计图用茎叶图表示如图所示, 若甲、乙两人的平均成绩分别用 $x_{\text{甲}}$ 、 $x_{\text{乙}}$ 表示, 则下列结论正确的是 ().

甲		乙
9 8	8	3 8 9 9
2 1 0	9	1

- A. $x_{\text{甲}} > x_{\text{乙}}$, 且甲比乙成绩稳定 B. $x_{\text{甲}} > x_{\text{乙}}$, 且乙比甲成绩稳定

C. $x_{甲} < x_{乙}$, 且甲比乙成绩稳定

D. $x_{甲} < x_{乙}$, 且乙比甲成绩稳定

6. 已知 S_n 是等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, $S_8 < 0$, $S_9 = 0$. 若 $S_n \geq S_k$ 对 $n \in \mathbb{N}^*$ 恒成立, 则正整数 k 构成的集合是 ()

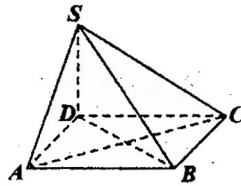
A. $\{4,5\}$

B. $\{4\}$

C. $\{3,4\}$

D. $\{5,6\}$

7. 如图, 四棱锥 $S-ABCD$ 的底面为正方形, $SD \perp$ 底面 $ABCD$, 则下列结论中不正确的是 ()



A. $AC \perp SB$

B. $AB \parallel$ 平面 SCD

C. SA 与平面 SBD 所成的角等于 SC 与平面 SBD 所成的角

D. AB 与 SC 所成的角等于 DC 与 SA 所成的角

8. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} [x], & x \geq 0 \\ \frac{1}{x}, & x < 0 \end{cases}$ ($[x]$ 表示不超过 x 的最大整数), 若 $f(x) - ax = 0$ 有且仅有 3 个零点, 则实数 a 的取值范围是 ()

A. $(\frac{1}{2}, \frac{2}{3}]$

B. $[\frac{1}{2}, \frac{2}{3})$

C. $[\frac{2}{3}, \frac{3}{4})$

D. $(\frac{2}{3}, \frac{3}{4}]$

二、填空题 (每小题 5 分, 共 20 分)

9. 已知函数 $f(x) = 4x + \frac{a}{x}$ ($x > 0, a > 0$) 在 $x=3$ 时取得最小值, 则 $a =$ _____.

10. 若直线 $3x - 4y + 5 = 0$ 与圆 $x^2 + y^2 = r^2$ ($r > 0$) 相交于 A, B 两点, 且 $\angle AOB = 120^\circ$ (O 为坐标原点), 则 $r =$ _____.

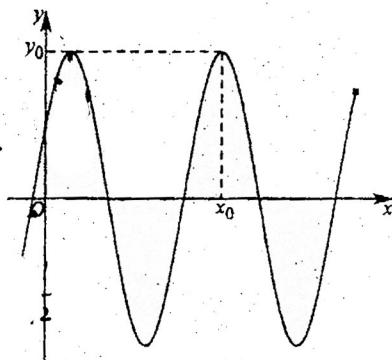
11. 设数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n . 若 $a_1 = 1$, $a_{n+1} = 2S_n + 1$, $n \in \mathbb{N}^*$, 则 $S_5 =$ _____.

12. 若平面向量 α, β 满足 $|\alpha| = 1$, $|\beta| \leq 1$, 且以向量 α, β 为邻边的平行四边形的面积为 $\frac{1}{2}$, 则 α 与 β 的夹角 θ 的取值范围是 _____.

三、解答题（每小题 10 分，共 40 分。解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤。）

13. 函数 $f(x) = 3\sin(2x + \frac{\pi}{6})$ 的部分图象如图所示。

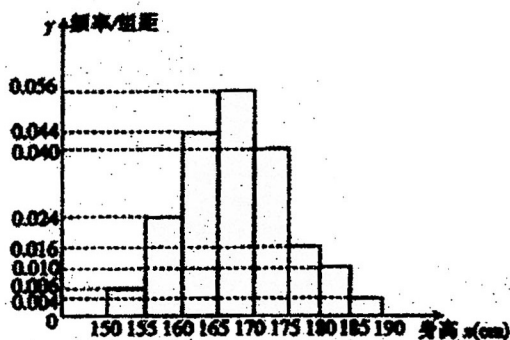
- (1) 写出 $f(x)$ 的最小正周期及图中 x_0 、 y_0 的值；
- (2) 求 $f(x)$ 在区间 $[-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{12}]$ 上的最大值和最小值。



14. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_6 = 6 + a_3$ ，且 $a_3 - 1$ 是 $a_2 - 1, a_1$ 的等比中项。

- (1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；
- (2) 设 $b_n = \frac{1}{a_n a_{n+1}}$ ($n \in \mathbb{N}^*$)，数列 $\{b_n\}$ 的前项和为 T_n ，求使 $T_n < \frac{1}{7}$ 成立的最大正整数 n 的值。

15. 为了了解当下高二男生的身高状况, 某地区对高二年级男生的身高 (单位:cm) 进行了抽样调查, 得到的频率分布直方图如图所示. 已知身高在 (185,190] 之间的男生人数比身高在 (150,155] 之间的人数少 1 人.



(1) 若身高在 (160,175] 以内的定义为身高正常, 而该地区共有高二男生 18000 人, 则该地区高二男生中身高正常的大约有多少人?

(2) 从所抽取的样本中身高在 (150,155] 和 (185,190] 的男生中随机再选出 2 人调查其平时体育锻炼习惯对身高的影响, 则所选出的 2 人中至少有一人身高大于 185cm 的概率是多少?

16. 在 $\triangle ABC$ 中, a, b, c 分别为内角 A, B, C 所对的边长. 已知 $\frac{\cos A - 2\cos C}{\cos B} = \frac{2c - a}{b}$.

(1) 求 $\frac{\sin C}{\sin A}$ 的值;

(2) 若 $\cos B = \frac{1}{4}$, $b = 2$, $\triangle ABC$ 的面积 S .