2017-2018 学年下学期期末三校联考
高一数学参考答案

一、选择题：

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答案	D	A	A	C	B	D	B	B	C	C	D	A

二、填空题：

13. $\underline{\ 4\ }$　　14. $\underline{\dfrac{\sqrt{15}-2}{6}}$　　15. $\underline{\dfrac{4}{7}}$　　16. $\underline{\dfrac{\pi}{6}}$ 或 $\underline{\dfrac{7\pi}{6}}$

三、解答题：

17.（1）法一：$\because\ \vec{a}\perp\vec{b}$，$\therefore \vec{a}\cdot\vec{b}=-2\cos^2 x+\sqrt{3}\sin 2x+1=0$ ……………………1 分

即 $\sqrt{3}\sin 2x=\cos 2x$，亦即 $\tan 2x=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ ……………………2 分

$$\therefore \frac{1}{\sin^2 2x-\sin 2x\cos 2x}=\frac{\sin^2 2x+\cos^2 2x}{\sin^2 2x-\sin 2x\cos 2x}=\frac{\tan^2 2x+1}{\tan^2 2x-\tan 2x}$$ ……………4 分

$$=\frac{\frac{1}{3}+1}{\frac{1}{3}-\frac{\sqrt{3}}{3}}=-2-2\sqrt{3}$$ ……………………5 分

法二：$\because\ \vec{a}\perp\vec{b}$，$\therefore \vec{a}\cdot\vec{b}=-2\cos^2 x+\sqrt{3}\sin 2x+1=0$ ……………………1 分

即 $\sqrt{3}\sin 2x=\cos 2x$ ……………………2 分

$$\therefore \frac{1}{\sin^2 2x-\sin 2x\cos 2x}=\frac{\sin^2 2x+\cos^2 2x}{\sin^2 2x-\sin 2x\cos 2x}=\frac{\sin^2 2x+3\sin^2 2x}{\sin^2 2x-\sqrt{3}\sin^2 2x}$$ ………4 分

$$=\frac{1+3}{1-\sqrt{3}}=-2-2\sqrt{3}$$ ……………………5 分

法三：$\because\ \vec{a}\perp\vec{b}$，$\therefore \vec{a}\cdot\vec{b}=-2\cos^2 x+\sqrt{3}\sin 2x+1=0$ ……………………1 分

即 $\sqrt{3}\sin 2x=\cos 2x$，即 $2\sin(2x-\dfrac{\pi}{6})=0$

$\therefore 2x-\dfrac{\pi}{6}=k\pi(k\in Z)$，即 $2x=\dfrac{\pi}{6}+k\pi$ ……………………2 分

$\therefore \dfrac{1}{\sin^2 2x-\sin 2x\cos 2x}=\dfrac{2}{1-\sqrt{2}\sin(4x+\dfrac{\pi}{4})}$ ……………………………………3 分

$=\dfrac{2}{1-\sqrt{2}\sin(2k\pi+\dfrac{\pi}{3}+\dfrac{\pi}{4})}$

$=\dfrac{2}{1-\sqrt{2}\sin(\dfrac{\pi}{3}+\dfrac{\pi}{4})}$ ……………………………………4 分

$=\dfrac{2}{1-\sqrt{2}\cdot\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}}$

$=-2-2\sqrt{3}$ ……………………………………………5 分

（2）$f(x)=\vec{a}\cdot\vec{b}=-2\cos^2 x+\sqrt{3}\sin 2x+1=\sqrt{3}\sin 2x-\cos 2x=2\sin(2x-\dfrac{\pi}{6})$ …7 分

$\therefore$ $f(x)$ 的最小正周期为 $T=\dfrac{2\pi}{2}=\pi$ ……………………………………………8 分

令 $\dfrac{\pi}{2}+2k\pi\le 2x-\dfrac{\pi}{6}\le\dfrac{3\pi}{2}+2k\pi(k\in Z)$，得 $\dfrac{\pi}{3}+k\pi\le x\le\dfrac{5\pi}{6}+k\pi$

$\therefore$ $f(x)$ 的单调递减区间为 $[\dfrac{\pi}{3}+k\pi,\dfrac{5\pi}{6}+k\pi](k\in Z)$ ……………………………10 分

18.（1）由 $a_n a_{n+1}=4S_n-1$ ……………………①

得 $a_{n+1}a_{n+2}=4S_{n+1}-1$ ……………………②

①－②，得 $a_{n+1}(a_{n+2}-a_n)=4a_{n+1}$ ……………………………………………2 分

$\because a_{n+1}\ne 0$，$\therefore$ $a_{n+2}-a_n=4$ ……………………………………………3 分

（2）由 $a_1=1$，$a_1a_2=4S_1-1=4a_1-1$，得 $a_2=3$ …………………………………4 分

$\therefore\{a_{2n-1}\}$ 是首项为 1,公差为 4 的等差数列；$\{a_{2n}\}$ 是首项为 3,公差为 4 的等差数列.

$\therefore$ $a_{2n-1}=4n-3=2(2n-1)-1$，$a_{2n}=4n-1=2\cdot 2n-1$.

故 $a_n=2n-1(n\in N^*)$，且 $a_{n+1}-a_n=2$ ……………………………………6 分

$\therefore$数列 $\{a_n\}$ 是等差数列，且 $S_n=\dfrac{n(1+2n-1)}{2}=n^2$

$\because \dfrac{b_n}{2^n}=\dfrac{S_n}{n}$，$\therefore b_n=2^n\cdot\dfrac{S_n}{n}=n\cdot 2^n$ ……………………………………8 分

$\therefore T_{2018}=1\cdot 2^1+2\cdot 2^2+3\cdot 2^3+\ldots+2018\cdot 2^{2018}$ ①

$2T_{2018}=1\cdot 2^2+2\cdot 2^3+3\cdot 2^4+\ldots+2018\cdot 2^{2019}$ ②

①-②，得 $-T_{2018}=2^1+2^2+2^3+\ldots+2^{2018}-2018\cdot 2^{2019}$ ……………………………10 分

$=\dfrac{2(1-2^{2018})}{1-2}-2018\cdot 2^{2019}$ ……………………………………………11 分

$=2^{2019}-2-2018\cdot 2^{2019}$

$=-2-2017\cdot 2^{2019}$ ……………………………………………………12 分

$\therefore T_{2018}=2+2017\cdot 2^{2019}$

19.（1）解法 1：由已知，得 $a\cos B+b\cos A=2c\cos A$.

由正弦定理，得 $\sin A\cos B+\sin B\cos A=2\sin C\cos A$， ………………………1 分

即 $\sin(A+B)=2\sin C\cos A$. ………………………………………………2 分

$\because \sin(A+B)=\sin(\pi-C)=\sin C$ ……………………………………………3 分

$\therefore \sin C=2\sin C\cos A$ ………………………………………………………4 分

$\because \sin C\neq 0$，所以 $\cos A=\dfrac{1}{2}$ ……………………………………………………5 分

$\because 0<A<\pi$，所以 $A=\dfrac{\pi}{3}$. ……………………………………………………6 分

解法 2：由已知根据余弦定理，得

$a\times\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=(2c-b)\times\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$. ……………………………………1 分

即 $b^2+c^2-a^2=bc$ ……………………………………………………………3 分

$\therefore \cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\dfrac{1}{2}$ ……………………………………………………5 分

$\because 0<A<\pi$， $\therefore A=\dfrac{\pi}{3}$. ……………………………………………………6 分

（2）解法 1：由余弦定理 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$，得 $bc+16=b^2+c^2$ …………7 分

即 $(b+c)^2=3bc+16$. ……………………………………………………8 分

$\because bc\leq\left(\dfrac{b+c}{2}\right)^2$ ………………………………………………………………9 分

$\therefore (b+c)^2\leq\dfrac{3}{4}(b+c)^2+16$ 即 $b+c\leq 8$（当且仅当 $b=c=4$ 时等号成立）. …11 分

$\therefore a+b+c\leq 12$，故△ABC 周长 $a+b+c$ 的最大值为12. ……………………12 分

解法 2：$\because \dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}=2R$，且 $a=4$， $A=\dfrac{\pi}{3}$，

$\therefore b=\dfrac{8\sqrt{3}}{3}\sin B$， $c=\dfrac{8\sqrt{3}}{3}\sin C$. ……………………………………………8 分

$\therefore a+b+c=4+\dfrac{8\sqrt{3}}{3}(\sin B+\sin C)=4+\dfrac{8\sqrt{3}}{3}\left[\sin B+\sin\left(\dfrac{2\pi}{3}-B\right)\right]$

$=4+8\sin\left(B+\dfrac{\pi}{6}\right)$. ……………………………………………………10 分

$\because 0<B<\dfrac{2\pi}{3}$，$\therefore$当 $B=\dfrac{\pi}{3}$ 时，$a+b+c$ 取得最大值 12.

故△ABC 周长 $a+b+c$ 的最大值为 12. ……………………………………………12 分

20.（1）$\because E$、F 分别是 AC、BC 的中点，$\therefore EF // AB$ ……………………………1 分

在正三角形 PAC 中，$PE\perp AC$

又$\because$平面 $PAC\perp$平面 ABC，平面 $PAC\cap$平面 $ABC=AC$，$PE\subset$平面PAC

$\therefore PE\perp$平面 ABC

$\because AB\subset$平面ABC，$\therefore PE\perp AB$ ……………………………………………3 分

又$\because PD\perp AB$，$PE\cap PD=D$，PE、$PD\subset$平面PED

$\therefore AB\perp$平面 PED，$\because ED\subset$平面PED，$\therefore AB\perp ED$ ……………………5 分

又$\because EF // AB$，$\therefore EF\perp ED$. ……………………………………………………6 分

（2）依题意 $PE=BE=FA=\sqrt{3}$，设点 F 到平面 PAB 的距离为 d，则

$\because V_{F-PAB}=V_{P-ABF}$，$\therefore \dfrac{1}{3}S_{\Delta PAB}\cdot d=\dfrac{1}{3}S_{\Delta ABF}\cdot PE$ ……………………………7 分

由 $AB\perp ED$ 及 $AB\cdot ED=AE\cdot BE$，得 $ED=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

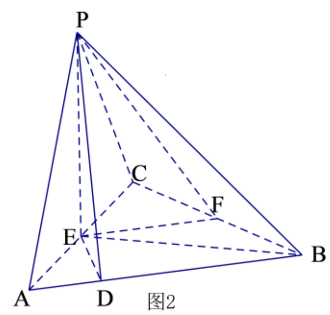


图2

$\therefore PD=\sqrt{PE^2+ED^2}=\dfrac{\sqrt{15}}{2}$

$\therefore S_{\Delta PAB}=\dfrac{1}{2}AB\cdot PD=\dfrac{\sqrt{15}}{2}$ ………………9 分

由 $EF // AB$，可知 $S_{\Delta ABF}=\dfrac{1}{2}AB\cdot ED=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ ……………………………11 分

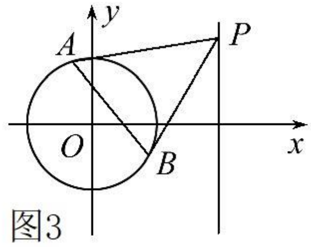
$\therefore d=\dfrac{S_{\Delta ABF}\cdot PE}{S_{\Delta PAB}}=\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}=\dfrac{\sqrt{15}}{5}$ ……………………………………………………12 分

21.（1）圆 C 的圆心 O 到直线 $x+y+4\sqrt{2}=0$ 的距离为 $d=\dfrac{|0+0+4\sqrt{2}|}{\sqrt{1^2+1^2}}=4$ ……1 分

$\because$圆 C 与直线 $x+y+4\sqrt{2}=0$ 相切，$\therefore$圆 C 的半径 $r=d=4$ …………………2 分

$\therefore$圆 C 的方程为 $x^2+y^2=16$. ……………………………………………………3 分

（2）**法一**：依题意，直线 AB 的斜率不为 0，可设



其方程为 $x=ky+m$，$P(8,b)$，$A(ky_1+m,y_1)$

$B(ky_2+m,y_2)$，则 $\overrightarrow{OA}=(ky_1+m,y_1)$，$\overrightarrow{OB}=(ky_2+m,y_2)$

$\overrightarrow{PA}=(ky_1+m-8,y_1-b)$，$\overrightarrow{PB}=(ky_2+m-8,y_2-b)$ ……………………………5 分

联立 $\begin{cases}x=ky+m\\x^2+y^2=16\end{cases}$，消去 x 并整理，得 $(1+k^2)y^2+2kmy+m^2-16=0$ ………6 分

$\therefore\Delta=4k^2m^2-4(1+k^2)(m^2-16)>0$，且 $y_1+y_2=-\dfrac{2km}{1+k^2}$，$y_1y_2=\dfrac{m^2-16}{1+k^2}$……8 分

$\because PA$、PB 是圆 C 的切线，$\therefore\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{PA}=(ky_1+m)(ky_1+m-8)+y_1(y_1-b)=0$

即 $(1+k^2){y_1}^2+(2km-8k-b)y_1+m^2-8m=0$，同理 $(1+k^2){y_2}^2+(2km-8k-b)y_2+m^2-8m=0$

$\therefore y_1,y_2$ 为方程 $(1+k^2)y^2+(2km-8k-b)y+m^2-8m=0$ 的两根，且 $y_1y_2=\dfrac{m^2-8m}{1+k^2}$ …10 分

$\therefore\dfrac{m^2-16}{1+k^2}=\dfrac{m^2-8m}{1+k^2}$，解得 $m=2$，且 $\Delta=16k^2+48(1+k^2)>0$ ……………………11 分

$\therefore$直线 AB：$x=ky+2$ 恒过定点 $(2,0)$.……………………………………………………12 分

法二：依题意，设 $P(8,b)$，$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，则 $k_{OA}=\dfrac{y_1}{x_1}$，$k_{OB}=\dfrac{y_2}{x_2}$ $(x_1,x_2\neq0)$

$\because PA$ 是圆 C 的切线，$\therefore OA\perp PA$，$k_{PA}=-\dfrac{x_1}{y_1}$ ……………………………………………5 分

故直线 PA 的方程为 $y-y_1=-\dfrac{x_1}{y_1}(x-x_1)$，即 $x_1x+y_1y={x_1}^2+{y_1}^2$ ………………6 分

$\because A$ 在圆 C 上，$\therefore{x_1}^2+{y_1}^2=16$，直线 PA 的方程为 $x_1x+y_1y-16=0$ ……………7 分

$\because P(8,b)$ 在直线 PA 上，$\therefore 8x_1+by_1-16=0$ ……………………………………………8 分

同理可得，$8x_2+by_2-16=0$ ……………………………………………………………9 分

故 A、B 在直线 $8x+by-16=0$ 上，即直线 AB 的方程为 $8x+by-16=0$ …………10 分

显然，直线 AB：$8x+by-16=0$ 过定点 $(2,0)$ ……………………………………………11 分

当 $x_1=0$ 或 $x_2=0$ 时，不妨设 $x_1=0$，则 $A(0,4),P(8,4)$，可求得 $B(\frac{16}{5},-\frac{12}{5})$

此时直线 AB：$y=-2x+4$ 经过点 $(2,0)$ ……………………………………………………12 分

综上所述，直线 AB 恒过定点 $(2,0)$.

法三： $\because PA$、PB 是圆 C 的两条切线，$\therefore OA\perp PA,OB\perp PB$

$\therefore A,B$ 在以 OP 为直径的圆上 ……………………………………………………5 分

设点 $P(8,b)$，则线段 OP 的中点坐标为 $(4,\frac{b}{2})$

$\therefore$ 以 OP 为直径的圆方程为 $(x-4)^2+(y-\frac{b}{2})^2=16+(\frac{b}{2})^2$ 即 $x^2+y^2-8x-by=0$

$\because AB$ 为两圆的公共弦，$\therefore$ 直线 AB 的方程为 $x^2+y^2-8x-by-(x^2+y^2-16)=0$

即 $8x+by-16=0$ ………………………………………………………………………11 分

$\therefore$ 直线 AB：$8x+by-16=0$ 恒过定点 $(2,0)$. ………………………………………12 分

22.（1）当 $a=0$ 时，$f(x)=x|x|$，$f(-x)=-x|-x|=-x|x|=-f(x)$ …………1 分

当 $a\neq 0$ 时，$f(a)=0,f(-a)=-a|-2a|=-2a|a|\neq 0$

此时 $f(-a)\neq f(a)$ 且 $f(-a)\neq -f(a)$ ……………………………………………2 分

综上，当 $a=0$ 时，$f(x)$ 为奇函数；当 $a\neq 0$ 时，$f(x)$ 为非奇非偶函数. ………3 分

（2）当 $a=0$ 时，$f(x)=\begin{cases}x^2,x\geq 0\\ -x^2,x<0\end{cases}$，结合图形可得，$f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上单调递增.

……………………………………………………………………………………………4 分

当 $a\neq 0$ 时，$f(x)=\begin{cases}x(x-a),x\geq a\\ -x(x-a),x<a\end{cases}$

①若 $a>0$，则结合图形可得，$f(x)$ 在 $(-\infty,\frac{a}{2})$ 上单调递增，在 $[\frac{a}{2},a]$ 上单调递减，在 $(a,+\infty)$ 上单调递增. ……………………………………………………5 分

②若 $a<0$，则结合图形可得，$f(x)$ 在 $(-\infty,a)$ 上单调递增，在 $[a,\frac{a}{2}]$ 上单调递减，在

$(\frac{a}{2},+\infty)$ 上单调递增. ……………………………………………………………………6 分

综上，当 $a=0$ 时， $f(x)$ 的单调递增区间为 $(-\infty,+\infty)$，无单调递减区间；当 $a>0$ 时， $f(x)$ 的单调递增区间为 $(-\infty,\frac{a}{2})$ 和 $(a,+\infty)$，单调递减区间为 $[\frac{a}{2},a]$；当 $a<0$ 时，$f(x)$ 的单调递增区间为 $(-\infty,a)$ 和 $(\frac{a}{2},+\infty)$，单调递减区间为 $[a,\frac{a}{2}]$.

（3）令 $g(x)=0$，得 $f(x)=b$，则对任意的 $a\in[2,4]$

函数 $g(x)$ 恒有 3 个零点 $\Leftrightarrow$ 方程 $f(x)=b$ 恒有 3 个不等实根

$\Leftrightarrow$ 直线 $y=b$ 与函数 $y=f(x)$ 的图象有三个不同公共点 …8 分

$\because$ $f(x)$ 在 $(-\infty,\frac{a}{2})$ 上单调递增，在 $[\frac{a}{2},a]$ 上单调递减，在 $(a,+\infty)$ 上单调递增

$\therefore$ $0<b<f(\frac{a}{2})$ 恒成立……………………………………………………………………10 分

$\because$ $a\in[2,4]$，$\therefore$ $f(\frac{a}{2})=\frac{a^2}{4}\in[1,4]$ ……………………………………………………11 分

$\therefore$ $0<b<1$，故实数 b 的取值范围为 $(0,1)$. ……………………………………………12 分