

## 数 学

本试卷分选择题和非选择题两部分。第 I 卷(选择题)1 至 2 页,第 II 卷(非选择题)3 至 4 页,共 4 页,满分 150 分,考试时间 120 分钟。

## 注意事项:

1. 答题前,务必将自己的姓名、考籍号填写在答题卡规定的位置上。
2. 答选择题时,必须使用 2B 铅笔将答题卡上对应题目的答案标号涂黑,如需改动,用橡皮擦擦干净后,再选涂其它答案标号。
3. 答非选择题时,必须使用 0.5 毫米黑色签字笔,将答案书写在答题卡规定的位置上。
4. 所有题目必须在答题卡上作答,在试题卷上答题无效。
5. 考试结束后,只将答题卡交回。

## 第 I 卷(选择题,共 60 分)

一、选择题:本大题共 12 小题,每小题 5 分,共 60 分. 在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的.

1. 设集合  $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ,  $A = \{1, 2, 3\}$ , 则  $\complement_U A =$

- (A)  $\{1, 2, 3\}$       (B)  $\{4, 5, 6\}$       (C)  $\{1, 2\}$       (D)  $\{5, 6\}$

2. 已知向量  $\mathbf{a} = (1, 2)$ ,  $\mathbf{b} = (1, -1)$ , 则  $2\mathbf{a} + \mathbf{b} =$

- (A)  $(3, 0)$       (B)  $(2, 1)$       (C)  $(-3, 3)$       (D)  $(3, 3)$

3. 半径为 3, 圆心角为  $\frac{\pi}{4}$  的扇形的弧长为

- (A)  $\frac{3\pi}{8}$       (B)  $\frac{9\pi}{8}$       (C)  $\frac{3\pi}{4}$       (D)  $\frac{9\pi}{4}$

4. 下列四组函数中,  $f(x)$  与  $g(x)$  相等的是

- (A)  $f(x) = 1, g(x) = x^0$       (B)  $f(x) = \ln x^2, g(x) = 2 \ln x$   
 (C)  $f(x) = x, g(x) = (\sqrt{x})^2$       (D)  $f(x) = x, g(x) = \sqrt[3]{x^3}$

5. 若函数  $y = \log_a(x+3)$  ( $a > 0$ , 且  $a \neq 1$ ) 的图象恒过定点  $P$ , 则点  $P$  的坐标是

- (A)  $(-2, 0)$       (B)  $(0, 2)$       (C)  $(0, 3)$       (D)  $(-3, 0)$

6. 已知  $\tan\alpha=3$ , 则  $\frac{2\sin\alpha+\cos\alpha}{2\cos\alpha-3\sin\alpha}$  的值是

- (A)  $\frac{5}{3}$                       (B) 1                      (C) -1                      (D)  $-\frac{5}{3}$

7. 已知关于  $x$  的方程  $x^2-ax+3=0$  有一根大于 1, 另一根小于 1, 则实数  $a$  的取值范围是

- (A)  $(4, +\infty)$               (B)  $(-\infty, 4)$               (C)  $(-\infty, 2)$               (D)  $(2, +\infty)$

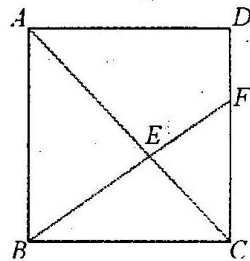
8. 设  $a=5^{0.4}, b=0.4^5, c=\log_5 0.4$ , 则  $a, b, c$  的大小关系是

- (A)  $a < b < c$               (B)  $b < c < a$               (C)  $c < a < b$               (D)  $c < b < a$

9. 若函数  $f(x)$  唯一的一个零点同时在区间  $(0, 2), (0, 4), (0, 8), (0, 16)$  内, 则下列命题中正确的是

- (A) 函数  $f(x)$  在区间  $(0, 1)$  内有零点              (B) 函数  $f(x)$  在区间  $[2, 16)$  上无零点  
(C) 函数  $f(x)$  在区间  $(1, 16)$  内无零点              (D) 函数  $f(x)$  在区间  $(0, 1)$  或  $(1, 2)$  内有零点

10. 如图, 在正方形  $ABCD$  中,  $F$  是边  $CD$  上靠近  $D$  点的三等分点, 连接  $BF$  交  $AC$  于点  $E$ , 若  $\vec{BE}=m\vec{AB}+n\vec{AC}$  ( $m, n \in \mathbf{R}$ ), 则  $m+n$  的值是



- (A)  $-\frac{1}{5}$                       (B)  $\frac{1}{5}$   
(C)  $-\frac{2}{5}$                       (D)  $\frac{2}{5}$

11. 已知  $\omega > 0, |\varphi| \leq \frac{\pi}{2}$ , 在函数  $f(x)=\sin(\omega x+\varphi), g(x)=\cos(\omega x+\varphi)$  的图象的交点中,

相邻两个交点的横坐标之差的绝对值为  $\frac{\pi}{2}$ , 当  $x \in (-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4})$  时, 函数  $f(x)$  的图象恒在  $x$  轴的上方, 则  $\varphi$  的取值范围是

- (A)  $(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3})$               (B)  $[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}]$               (C)  $(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2})$               (D)  $[\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}]$

12. 已知函数  $f(x)=\begin{cases} |\ln x|, & x > 0 \\ -x^2+mx, & x \leq 0 \end{cases}$  和  $g(x)=a$  ( $a \in \mathbf{R}$  且为常数). 有以下结论: ①当

$a=4$  时, 存在实数  $m$ , 使得关于  $x$  的方程  $f(x)=g(x)$  有四个不同的实数根; ②存在  $m \in [3, 4]$ , 使得关于  $x$  的方程  $f(x)=g(x)$  有三个不同的实数根; ③当  $x > 0$  时, 若函数  $h(x)=f^2(x)+bf(x)+c$  恰有 3 个不同的零点  $x_1, x_2, x_3$ , 则  $x_1x_2x_3=1$ ; ④当  $m=-4$  时, 关于  $x$  的方程  $f(x)=g(x)$  有四个不同的实数根  $x_1, x_2, x_3, x_4$ , 且  $x_1 < x_2 < x_3 < x_4$ , 若  $f(x)$  在  $[x_3^2, x_4]$  上的最大值为  $\ln 4$ , 则  $\sin(3x_1+3x_2+5x_3+4x_4)\pi=1$ . 其中正确结论的个数是

- (A) 1 个                      (B) 2 个                      (C) 3 个                      (D) 4 个

## 第 II 卷(非选择题,共 90 分)

二、填空题:本大题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分.把答案填在答题卡上.

13.  $\cos \frac{2\pi}{3}$  的值是\_\_\_\_\_.

14. 已知幂函数  $f(x)=x^{\alpha}$  ( $\alpha$  为常数) 的图象经过点  $(3, \sqrt{3})$ , 则  $\alpha$  的值是\_\_\_\_\_.

15. 若将函数  $f(x)=\sin(\omega x + \frac{\pi}{6})$  ( $0 < \omega < 7$ ) 的图象向右平移  $\frac{\pi}{3}$  个单位后恰与  $f(x)$  的图象重合, 则  $\omega$  的值是\_\_\_\_\_.

16. 已知  $f(x)$  是定义在  $\mathbf{R}$  上的奇函数, 且当  $x \geq 0$  时,  $f(x) = \begin{cases} -x, & 0 \leq x \leq 1 \\ -1, & 1 < x < 2 \\ x-3, & x \geq 2 \end{cases}$ . 若对任意的

$x \in \mathbf{R}$ , 不等式  $f(x) > f(x - \sqrt{2}a)$  恒成立, 则实数  $a$  的取值范围是\_\_\_\_\_.

三、解答题:本大题共 6 小题,共 70 分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. (本小题满分 10 分)

计算: (I)  $(\sqrt{3}-1)^0 + \sqrt{(3-\pi)^2} + \left(\frac{1}{8}\right)^{-\frac{1}{3}}$ ;

(II)  $2\lg 5 + \lg \frac{2}{5} + 2^{\log_2 3}$ .

18. (本小题满分 12 分)

已知函数  $f(x) = \frac{1}{x^2}$ .

(I) 判断函数  $f(x)$  的奇偶性, 并说明理由;

(II) 用函数单调性的定义证明函数  $f(x)$  在  $(0, +\infty)$  上是减函数.

19. (本小题满分 12 分)

某公司在 2018 年承包了一个工程项目, 经统计发现该公司在这项工程项目上的月利润  $P$  与月份  $x$  近似的满足某一函数关系. 其中 2 月到 5 月所获利润统计如下表:

月份(月)	2	3	4	5
所获利润(亿元)	89	90	89	86

(I) 已知该公司的月利润  $P$  与月份  $x$  近似满足下列中的某一个函数模型:

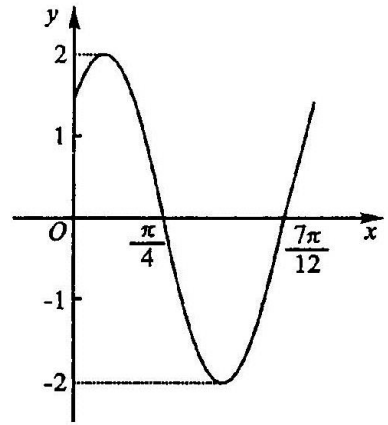
①  $P(x) = ax^2 + bx + c$ ; ②  $P(x) = a \cdot b^x + c$ ; ③  $P(x) = a \log_b x + c$ .

请以表中该公司这四个月的利润与月份的数据为依据给出你的选择(需要说明选择该模型的理由), 并据此估计该公司 2018 年 8 月份在这项工程项目中获得的利润;

(II) 对(I)中选择的函数模型  $P(x)$ , 若该公司在 2018 年承包项目的月成本符合函数模型  $Q(x) = \sqrt{P(x)} - 2x + 36$  (单位: 亿元), 求该公司 2018 年承包的这项工程项目月成本的最大值及相应的月份.

20. (本小题满分 12 分)

已知函数  $f(x) = 2\sin(\omega x + \varphi)$  ( $\omega > 0, |\varphi| < \frac{\pi}{2}$ ) 的部分图象如图所示.



(I) 求函数  $f(x)$  的解析式;

(II) 若将函数  $y = f(x)$  的图象上所有点的纵坐标不变, 横坐标伸长到原来的 2 倍, 得到函数  $y = g(x)$  的图象. 求当  $x \in [0, \pi]$  时, 函数  $y = g(x)$  的单调递增区间.

21. (本小题满分 12 分)

已知点  $O(0,0), B(0,1), C(m\cos x, \sin x)$ , 其中  $m \neq 0, x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ .

(I) 若  $|\vec{OC}| = |\vec{BC}|$ , 求  $x$  的值;

(II) 若函数  $f(x) = \vec{OC} \cdot \vec{BC}$  的最小值为  $g(m)$ , 求  $g(m)$  的表达式.

22. (本小题满分 12 分)

已知定义在  $\mathbf{R}$  上的偶函数  $f(x)$  和奇函数  $g(x)$ , 且  $f(x) + g(x) = e^x$ .

(I) 求函数  $f(x), g(x)$  的解析式;

(II) 设函数  $F(x) = \frac{g(x - \frac{1}{2})}{f(x - \frac{1}{2})} + 1$ , 记  $H(n) = F(\frac{1}{n}) + F(\frac{2}{n}) + F(\frac{3}{n}) + \dots + F(\frac{n-1}{n})$

( $n \in \mathbf{N}^*, n \geq 2$ ). 探究是否存在正整数  $n (n \geq 2)$ , 使得对任意的  $x \in (0, 1]$ , 不等式  $g(2x) > H(n) \cdot g(x)$  恒成立? 若存在, 求出所有满足条件的正整数  $n$  的值; 若不存在, 请说明理由.