

江西师大附中高一年级数学期中试卷

命题人：倪雨婷 审题人：蔡卫强 2019.5

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

- 数列 $1, \frac{8}{5}, \frac{15}{7}, \frac{24}{9}, \dots$ 的一个通项公式为()
 A. $a_n = \frac{n^2}{2n+1}$ B. $a_n = \frac{n(n+2)}{n+1}$
 C. $a_n = \frac{(n+1)^2-1}{2(n+1)}$ D. $a_n = \frac{n(n+2)}{2n+1}$
- 下列命题中，正确的是()
 A. 若 $ac > bc$ ，则 $a > b$ B. 若 $a > b$ ， $c > d$ ，则 $a-c > b-d$
 C. 若 $a > b$ ， $c > d$ ，则 $ac > bd$ D. 若 $\sqrt{a} < \sqrt{b}$ ，则 $a < b$
- 某班运动队由足球运动员 18 人，篮球运动员 12 人、羽毛球运动员 6 人组成(每人只参加一项)，现从这些运动员中抽取一个容量为 n 的样本，若分别采用系统抽样法和分层抽样法，则都不用剔除个体；当抽取样本的容量为 $n+1$ 时，若采用系统抽样法，则需要剔除一个个体，则样本容量 $n=()$
 A. 6 B. 7 C. 12 D. 18
- 在 $\triangle ABC$ 中，内角 A, B, C 满足 $6\sin A = 4\sin B = 3\sin C$ ，则 $\cos B=()$
 A. $\frac{\sqrt{15}}{4}$ B. $\frac{3}{4}$ C. $\frac{3\sqrt{15}}{10}$ D. $\frac{11}{16}$
- $y = \frac{3+x+x^2}{1+x} (x > 0)$ 的最小值是()
 A. $2\sqrt{3}$ B. $-1+2\sqrt{3}$ C. $1+2\sqrt{3}$ D. $-2+2\sqrt{3}$
- 已知等差数列的前 n 项和为 18，若 $S_3=1$ ， $a_n+a_{n-1}+a_{n-2}=3$ ，则 n 的值为()
 A. 27 B. 21 C. 9 D. 36
- 将甲、乙两个篮球队 5 场比赛的得分数据整理成如图所示的茎叶图，由图可知以下结论正确的是()
 A. 甲队平均得分高于乙队的平均得分
 B. 甲队得分的中位数大于乙队得分的中位数
 C. 甲队得分的方差大于乙队得分的方差
 D. 甲乙两队得分的极差相等
- 若钝角 $\triangle ABC$ 的面积是 $\frac{1}{2}$ ， $AB=1$ ， $BC=\sqrt{2}$ ，则 $AC=()$
 A. 5 B. $\sqrt{5}$ C. 2 D. 1

甲				乙		
9	8	6	2	8	9	
	1	1	3	0	1	2

- 《张邱建算经》是中国古代数学史上的杰作，该书中有首古民谣记载了一数列问题：“南山一棵竹，竹尾凤割断，剩下三十节，一节一个圈，头节高五寸^①，头圈一尺三寸^②，逐节多三分^③，逐圈少三分^④。一蚁往上爬，遇圈则绕圈。爬到竹子顶，行程是多远？”(注释：①第一节的高度为 0.5 尺；②第一圈的周长为 1.3 尺；③每节比其下面的一节多 0.03 尺；④每圈周长比其下面的一圈少 0.013 尺)。问：此民谣提出的问题的答案是()
 A. 61.395 尺 B. 61.905 尺 C. 72.705 尺 D. 73.995 尺

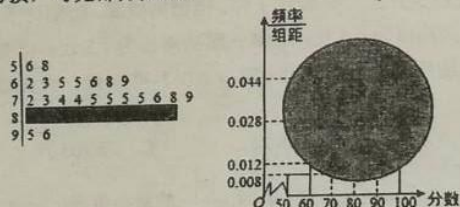
- 已知 $x+y=1, y>0, x \neq 0$ ，则 $\frac{1}{2|x|} + \frac{|x|}{y+1}$ 的最小值是()
 A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{1}{4}$ C. $\frac{3}{4}$ D. $\frac{5}{4}$
- 在各项均为正数的等比数列 $\{a_n\}$ 中，公比 $q \in (0, 1)$ 。若 $a_3+a_5=5, a_2 \cdot a_6=4, b_n = \log_2 a_n$ ，数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ，则当 $\frac{S_1}{1} + \frac{S_2}{2} + \dots + \frac{S_n}{n}$ 取最大值时， n 的值为()
 A. 8 B. 8 或 9 C. 9 D. 17
- 已知正实数 x, y 满足 $x+y+3=xy$ ，若对任意满足条件的 x, y ，都有 $(x+y)^2 - a(x+y) + 6 \geq 0$ 恒成立，则实数 a 的最大值为()
 A. $2\sqrt{6}$ B. 7 C. $4\sqrt{6}$ D. 8

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

- 若不等式 $(a-2)x^2 + 2(a-2)x - 4 < 0$ 对一切 $x \in \mathbb{R}$ 恒成立，则 a 的取值范围是_____。
- 若等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ，且 $\frac{S_4}{S_2}=5$ ，则 $\frac{S_8}{S_4}=_____$ 。
- 设正实数 x, y, z 满足 $x^2 - 3xy + 4y^2 - z = 0$ ，则当 $\frac{xy}{z}$ 取得最大值时， $\frac{2}{x} + \frac{1}{y} - \frac{2}{z}$ 的最大值为_____。
- $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c ，则下列命题正确的是_____。
 ① 若 $\sin A \sin B = 2\sin^2 C$ ，则 $0 < C < \frac{\pi}{4}$
 ② 若 $a+b > 2c$ ，则 $0 < C < \frac{\pi}{3}$
 ③ 若 $a^4 + b^4 = c^4$ ，则 $\triangle ABC$ 为锐角三角形
 ④ 若 $(a+b)c < 2ab$ ，则 $C > \frac{\pi}{2}$

三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (本小题满分 10 分) 某校高一(1)班的一次数学测试成绩的茎叶图和频率分布直方图都受到不同程度的污染，可见部分如图。



- (1) 求分数在 $[50, 60)$ 的频数及全班人数；
- (2) 求分数在 $[80, 90)$ 之间的频数，并计算频率分布直方图中 $[80, 90)$ 间矩形的高。

18. (本小题满分 12 分)

- (1) 求不等式 $\frac{(2x+3)(x^2-4x+4)}{3+2x-x^2} \leq 0$ 的解集。
- (2) 解关于 x 的不等式 $ax^2-2 \geq 2x-ax (a \in \mathbb{R})$ 。

19. (本小题满分 12 分) $\triangle ABC$ 中，内角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c ，且满足 $a=2\sin A$ ，

$$\frac{\cos B}{\cos C} + \frac{2a}{c} + \frac{b}{c} = 0.$$

- (1) 求 c 的值；
- (2) 求 $\triangle ABC$ 面积的最大值。

20. (本小题满分 12 分) 某车间为了规定工时定额，需要确定加工零件所花费的时间，为此作了四次试验，得到的数据如下：

零件的个数 x (个)	2	3	4	5
加工的时间 y (小时)	2.5	3	4	4.5

- (1) 求出 y 关于 x 的线性回归方程 $y = \hat{b}x + \hat{a}$ ；
- (2) 试预测加工 10 个零件需要的时间。

$$\left(\begin{aligned} \hat{b} &= \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i - n\bar{x} \cdot \bar{y}}{\sum_{i=1}^n x_i^2 - n\bar{x}^2}, \hat{a} = \bar{y} - \hat{b}\bar{x}, \sum_{i=1}^4 x_i y_i = 52.5, \sum_{i=1}^4 x_i^2 = 54 \end{aligned} \right)$$

21. (本小题满分 12 分) 为响应国家扩大内需的政策，某厂家拟在 2019 年举行促销活动，经调查测算，该产品的年销量(即该厂的年产量) x 万件与年促销费用 t ($t \geq 0$) 万元满足 $x = 4 - \frac{k}{2t+1}$ (k 为常数)。如果不搞促销活动，则该产品的年销量只能是 1 万件。已知 2019 年生产该产品的固定投入为 6 万元，每生产 1 万件该产品需要再投入 12 万元，厂家将每件产品的销售价格定为每件产品平均成本的 1.5 倍(产品成本包括固定投入和再投入两部分)。

- (1) 将该厂家 2019 年该产品的利润 y 万元表示为年促销费用 t 万元的函数；
- (2) 该厂家 2019 年的年促销费用投入多少万元时，厂家利润最大？

22. (本小题满分 12 分) 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = a, n^2 S_{n+1} = n^2 (S_n + a_n) + a_n^2, n \in \mathbb{N}^*$,

- (1) 若 $\{a_n\}$ 为不为 0 的等差数列，求 a ；
- (2) 若 $a = \frac{1}{3}$ ，证明： $a_n < 1$ 。