考号________ 班级________ 姓名________

永丰中学2019级高二数学单元测试卷

第一章检测

（时间：120 分钟　满分：150 分）

一、选择题（本大题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的）

1. 数列 1，-3，5，-7，9，…的一个通项公式为（　　）

A. $a_n=2n-1$　　B. $a_n=(-1)^n(1-2n)$

C. $a_n=(-1)^n(2n-1)$　　D. $a_n=(-1)^n(2n+1)$

2. 已知等差数列$\{a_n\}$的公差为 2，若 a_2，a_4，a_8 成等比数列，则$\{a_n\}$的前 n 项和 $S_n=$（　　）

A. $n(n+1)$　　B. $n(n-1)$

C. $\frac{n(n+1)}{2}$　　D. $\frac{n(n-1)}{2}$

3. 如果数列$\{a_n\}$是等比数列，那么（　　）

A. 数列$\{a_n^2\}$是等比数列　　B. 数列$\{2^{a_n}\}$是等比数列

C. 数列$\{\lg a_n\}$是等比数列　　D. 数列$\{na_n\}$是等比数列

4. 在正项等比数列$\{a_n\}$中，$a_3=\frac{2}{9}$，$S_3=\frac{26}{9}$，则数列$\{a_n\}$的通项公式为（　　）

A. $\frac{3}{4}\times\left(\frac{2}{3}\right)^n$　　B. $2\times\left(\frac{1}{3}\right)^n$

C. $2\times\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$　　D. $\frac{2}{81}\times3^{n-1}$

5. 某型号计算机的成本不断降低，若每隔两年该型号计算机价格降低$\frac{1}{3}$，现在的价格是 8 100 元，则 6 年后，价格降低为（　　）

A. 2 200 元　　B. 900 元

C. 2 400 元　　D. 3 600 元

6. 在各项均为正数的等比数列$\{b_n\}$中，若 $b_7\cdot b_8=3$，则 $\log_3 b_1+\log_3 b_2+\cdots+\log_3 b_{14}$等于（　　）

A. 5　　B. 6　　C. 7　　D. 8

7. 已知数列$\{a_n\}$满足$\frac{1}{a_{n+1}}-\frac{1}{a_n}=d$（$n\in\mathbf{N}_+$，$d$ 为常数），则称数列$\{a_n\}$为“调和数列”．若正项数列$\left\{\frac{1}{b_n}\right\}$为“调和数列”，且 $b_1+b_2+\cdots+b_9=90$，则 b_4b_6 的最大值是（　　）

A. 10　　B. 100

C. 200　　D. 400

8. 已知函数 $f(n)=n^2\cos n\pi$，且 $a_n=f(n)+f(n+1)$，则$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{100}=$（　　）

A. -100　　B. 0

C. 100　　D. 10 200

9. 已知 a_1，a_2，a_3，a_4 是各项均为正数的等比数列，且公比$q\neq1$，若将此数列删去某一项得到的数列（按原来的顺序）是等差数列，则 q 等于（　　）

A. $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$或$\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$　　B. $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$

C. $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$　　D. $1+\sqrt{5}$

10. 某化工厂打算投入一条新的生产线，但需要经环保部门审批同意方可投入生产．已知该生产线连续生产 n 年的累计产量（单位：t）为 $f(n)=\frac{1}{2}n(n+1)(2n+1)$，但如果年产量超过 150 t，将会给环境造成危害．为保护环境，环保部门应给该厂这条生产线拟定最长的生产期限是（　　）

A. 5 年　　B. 6 年　　C. 7 年　　D. 8 年

11. 若$\{a_n\}$是等差数列，首项$a_1>0$，$a_{1\,007}+a_{1\,008}>0$，$a_{1\,007}\cdot a_{1\,008}<0$，则使前$n$项和$S_n>0$成立的最大自然数$n$是(　　)

A. 2 012　　B. 2 013　　C. 2 014　　D. 2 015

12. 已知等差数列$\{a_n\}$的首项为a_1，公差为d，其前n项和为S_n，若直线$y=\frac{1}{2}a_1x+m$与圆$(x-2)^2+y^2=1$的两个交点关于直线$x+y-d=0$对称，则数列$\left\{\frac{1}{S_n}\right\}$的前100项和等于(　　)

A. $\frac{100}{101}$　　B. $\frac{99}{100}$　　C. $\frac{98}{99}$　　D. 1

二、填空题(本大题共4小题，每小题5分，共20分. 把答案填在题中的横线上)

13. 在等比数列$\{a_n\}$中，若$a_7+a_8+a_9+a_{10}=\frac{15}{8}$，$a_8a_9=-\frac{9}{8}$，则$\frac{1}{a_7}+\frac{1}{a_8}+\frac{1}{a_9}+\frac{1}{a_{10}}=$__________.

14. 将全体正整数排成一个三角形数阵：

1

2　3

4　5　6

7　8　9　10

11　12　13　14　15

…　…　…　…　…　…

根据以上排列规律，数阵中第$n(n\geqslant 3)$行从左至右的第3个数是__________________.

15. 设数列$\{a_n\}$的通项公式为$a_n=2n-7(n\in\mathbf{N}_+)$，则$|a_1|+|a_2|+\cdots+|a_{15}|=$____________.

16. 已知数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，$a_1=\frac{1}{5}$，且对任意正整数m,n，都有$a_{m+n}=a_ma_n$. 若$S_n<t$恒成立，则实数t的最小值为__________.

三、解答题(本大题共6小题，共70分. 解答时应写出文字说明、证明过程或演算步骤)

17. (10分)在等差数列$\{a_n\}$中，$a_3a_7=-16$，$a_4+a_6=0$，求$\{a_n\}$的前n项和S_n.

18.(12 分)已知数列$\{a_n\}$的前 n 项和 $S_n=1+\lambda a_n$,其中 $\lambda\neq 0$.

(1)证明$\{a_n\}$是等比数列,并求其通项公式;

(2)若 $S_5=\frac{31}{32}$,求 λ.

19.(12 分)设数列$\{a_n\}$的前 n 项和 S_n 满足 $2S_n=a_{n+1}-2^{n+1}+1,n\in\mathbf{N}_+$,且 a_1,a_2+5,a_3 成等差数列.

(1)求 a_1 的值;

(2)求数列$\{a_n\}$的通项公式.

20.(12 分)已知等差数列$\{a_n\}$满足 $a_3=2$,前 3 项和 $S_3=\frac{9}{2}$.

(1)求$\{a_n\}$的通项公式;

(2)设等比数列$\{b_n\}$满足 $b_1=a_1,b_4=a_{15}$,求$\{b_n\}$的前 n 项和 T_n.

21. (12 分)已知数列$\{a_n\}$满足 $a_1=1, a_{n+1}=3a_n+1$.

(1)证明$\left\{a_n+\frac{1}{2}\right\}$是等比数列,并求$\{a_n\}$的通项公式;

(2)证明:$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}<\frac{3}{2}$.

22. (12 分)已知 S_n 为数列$\{a_n\}$的前 n 项和,$a_n>0, a_n^2+2a_n=4S_n+3$.

(1)求$\{a_n\}$的通项公式;

(2)设 $b_n=\frac{1}{a_na_{n+1}}$,求数列$\{b_n\}$的前 n 项和.

永中数学单元检测参考答案

一、选择题

1. B　2. A　3. A　4. C　5. C　6. C　7. B
8. A　9. A　10. C　11. C　12. A

二、填空题

13. $-\frac{5}{3}$　14. $\frac{n^2-n+6}{2}$　15. 153　16. $\frac{1}{4}$

三、解答题

17. 解 设$\{a_n\}$的公差为 d,

则$\begin{cases}(a_1+2d)(a_1+6d)=-16,\\ a_1+3d+a_1+5d=0,\end{cases}$

即$\begin{cases}a_1^2+8da_1+12d^2=-16,\\ a_1=-4d,\end{cases}$

解得$\begin{cases}a_1=-8,\\ d=2\end{cases}$或$\begin{cases}a_1=8,\\ d=-2.\end{cases}$

故 $S_n=-8n+n(n-1)=n^2-9n$,

或 $S_n=8n-n(n-1)=-n^2+9n$.

18. 解 (1)由题意得 $a_1=S_1=1+\lambda a_1$,

故 $\lambda\neq1,a_1=\frac{1}{1-\lambda},a_1\neq0$.

由 $S_n=1+\lambda a_n,S_{n+1}=1+\lambda a_{n+1}$,

得 $a_{n+1}=\lambda a_{n+1}-\lambda a_n$,即 $a_{n+1}(\lambda-1)=\lambda a_n$.

由 $a_1\neq0,\lambda\neq1$,得 $a_n\neq0$,所以$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{\lambda}{\lambda-1}$.

因此$\{a_n\}$是首项为$\frac{1}{1-\lambda}$,公比为$\frac{\lambda}{\lambda-1}$的等比数列,于是 $a_n=\frac{1}{1-\lambda}\left(\frac{\lambda}{\lambda-1}\right)^{n-1}$.

(2)由(1)得 $S_n=1-\left(\frac{\lambda}{\lambda-1}\right)^n$.

由 $S_5=\frac{31}{32}$,得 $1-\left(\frac{\lambda}{\lambda-1}\right)^5=\frac{31}{32}$,

即$\left(\frac{\lambda}{\lambda-1}\right)^5=\frac{1}{32}$,解得 $\lambda=-1$.

19. 解 (1)$\because a_1,a_2+5,a_3$ 成等差数列,

$\therefore 2(a_2+5)=a_1+a_3$.

又 $2a_1=2S_1=a_2-2^2+1$,

$2(a_1+a_2)=2S_2=a_3-2^3+1$,

$\therefore a_2=2a_1+3,a_3=6a_1+13$.

$\therefore 4a_1+16=7a_1+13$,解得 $a_1=1$.

(2)由题设条件知,当 $n\geqslant2$ 时,$2S_{n-1}=a_n-2^n+1$,$2S_n=a_{n+1}-2^{n+1}+1$,

$\therefore 2a_n=a_{n+1}-a_n-2^n$,于是 $a_{n+1}=3a_n+2^n(n\geqslant2)$.

而由(1)知,$a_2=2a_1+3=5=3a_1+2$,

因此对一切正整数 n,有 $a_{n+1}=3a_n+2^n$,

$\therefore a_{n+1}+2^{n+1}=3(a_n+2^n)$.

又 $a_1+2^1=3$,$\therefore\{a_n+2^n\}$是以 3 为首项,3 为公比的等比数列.故 $a_n+2^n=3^n$,即 $a_n=3^n-2^n$.

20. 解 (1)设$\{a_n\}$的公差为 d,则由已知条件得 $a_1+2d=2,3a_1+\frac{3\times2}{2}d=\frac{9}{2}$,

化简得 $a_1+2d=2,a_1+d=\frac{3}{2}$,

解得 $a_1=1,d=\frac{1}{2}$,

故通项公式 $a_n=1+\frac{n-1}{2}$,即 $a_n=\frac{n+1}{2}$.

(2)由(1)得 $b_1=1,b_4=a_{15}=\frac{15+1}{2}=8$.

设$\{b_n\}$的公比为 q,则 $q^3=\frac{b_4}{b_1}=8$,从而 $q=2$,

故$\{b_n\}$的前 n 项和 $T_n=\frac{b_1(1-q^n)}{1-q}=\frac{1\times(1-2^n)}{1-2}=2^n-1$.

21. (1)**解** 由 $a_{n+1}=3a_n+1$ 得 $a_{n+1}+\frac{1}{2}=3\left(a_n+\frac{1}{2}\right)$.

又 $a_1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$,所以$\left\{a_n+\frac{1}{2}\right\}$是首项为$\frac{3}{2}$,公比为 3 的等比数列.

$a_n+\frac{1}{2}=\frac{3^n}{2}$,因此$\{a_n\}$的通项公式为 $a_n=\frac{3^n-1}{2}$.

(2)**证明** 由(1)知$\frac{1}{a_n}=\frac{2}{3^n-1}$.

因为当 $n\geqslant1$ 时,$3^n-1\geqslant2\times3^{n-1}$,

所以$\frac{1}{3^n-1}\leqslant\frac{1}{2\times3^{n-1}}$.

于是$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}\leqslant1+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{3^{n-1}}$

$=\frac{3}{2}\left(1-\frac{1}{3^n}\right)<\frac{3}{2}$.

所以$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}<\frac{3}{2}$.

22. 解 (1)由 $a_n^2+2a_n=4S_n+3$,可知 $a_{n+1}^2+2a_{n+1}=4S_{n+1}+3$.

可得 $a_{n+1}^2-a_n^2+2(a_{n+1}-a_n)=4a_{n+1}$,

即 $2(a_{n+1}+a_n)=a_{n+1}^2-a_n^2=(a_{n+1}+a_n)(a_{n+1}-a_n)$.

由于 $a_n>0$,可得 $a_{n+1}-a_n=2$.

又 $a_1^2+2a_1=4a_1+3$,

解得 $a_1=-1$(舍去)或 $a_1=3$.

所以$\{a_n\}$是首项为 3,公差为 2 的等差数列,通项公式为 $a_n=2n+1$.

(2)由 $a_n=2n+1$ 可知 $b_n=\frac{1}{a_na_{n+1}}=\frac{1}{(2n+1)(2n+3)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{2n+3}\right)$.

设数列$\{b_n\}$的前 n 项和为 T_n,则

$T_n=b_1+b_2+\cdots+b_n$

$=\frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{2n+3}\right)\right]$

$=\frac{n}{3(2n+3)}$.