

## 数学试卷

一、选择题:本大题共 12 小题,每小题 5 分,共 60 分,在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的.

1. 已知非零向量  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  满足  $|\vec{b}| = 4|\vec{a}|$ , 且  $\vec{a} \perp (2\vec{a} + \vec{b})$ , 则  $\vec{a}$  与  $\vec{b}$  的夹角为

- A.  $\frac{\pi}{3}$       B.  $\frac{\pi}{2}$       C.  $\frac{2\pi}{3}$       D.  $\frac{5\pi}{6}$

2. 已知  $a > 0$ ,  $b > 0$ , 若不等式  $\frac{2}{a} + \frac{1}{b} \geq \frac{m}{2a+b}$  恒成立, 则实数  $m$  的最大值是 ( )

- A. 10      B. 9      C. 8      D. 7

3. 在平行四边形  $ABCD$  中,  $F$  是  $CD$  边的中点,  $AF$  与  $BD$  相交于  $E$ , 则  $\vec{AE} =$  ( )

- A.  $\frac{1}{3}\vec{AB} + \frac{2}{3}\vec{AD}$       B.  $\frac{1}{4}\vec{AB} + \frac{3}{4}\vec{AD}$       C.  $\frac{1}{5}\vec{AB} + \frac{4}{5}\vec{AD}$       D.  $\frac{2}{5}\vec{AB} + \frac{3}{5}\vec{AD}$

4. 已知  $\triangle ABC$ , 点  $H, O$  为  $\triangle ABC$  所在平面内的点, 且  $\vec{AH} \cdot \vec{AB} = \vec{AH} \cdot \vec{AC}$ ,

$\vec{BH} \cdot \vec{BA} = \vec{BH} \cdot \vec{BC}$ ,  $\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} = \vec{OH}$ , 则点  $O$  为  $\triangle ABC$  的 ( )

- A. 内心      B. 外心      C. 重心      D. 垂心

5. 已知  $a, b, c$  为  $\triangle ABC$  的三个内角  $A, B, C$  的对边, 向量  $\vec{m} = (\sqrt{3}, -1)$ ,  $\vec{n} = ($

$\sin A)$ , 若  $\vec{m} \perp \vec{n}$ , 且  $a \cos B + b \cos A = c \sin C$ , 则角  $B =$

- A.  $\frac{\pi}{6}$       B.  $\frac{\pi}{3}$       C.  $\frac{\pi}{4}$       D.  $\frac{2\pi}{3}$

6. 若一个正三棱柱存在外接球与内切球, 则它的外接球与内切球表面积之比为

- A. 3 : 1      B. 4 : 1      C. 5 : 1      D. 6 : 1

7. 在 $\triangle ABC$ 中, 角 $A, B, C$ 所对的边分别为 $a, b, c$ , 若 $B = \frac{\pi}{3}, b = 6, \sin A - 2\sin C = 0$ , 则 $a = ( \quad )$

- A. 3      B.  $2\sqrt{3}$       C.  $4\sqrt{3}$       D. 12

8. 若一元二次不等式 $f(x) < 0$ 的解集为 $\{x | x < -1 \text{ 或 } x > \frac{1}{2}\}$ , 则 $f(10^x) > 0$ 的解集为 $( \quad )$

- A.  $\{x | x < -1 \text{ 或 } x > \lg 2\}$       B.  $\{x | -1 < x < \lg 2\}$   
 C.  $\{x | x > -\lg 2\}$       D.  $\{x | x < -\lg 2\}$

9. 已知 $f(x) = -2x^2 + bx + c$ , 不等式 $f(x) > 0$ 的解集是 $(-1, 3)$ , 若对于任意 $x \in [-1, 0]$ , 不等式 $f(x) + t \leq 4$ 恒成立, 则 $t$ 的取值范围 $( \quad )$

- A.  $(-\infty, 2)$       B.  $(-\infty, -2]$       C.  $(-\infty, -4)$       D.  $(-\infty, 4]$

10. 已知 $\triangle ABC$ 中,  $A, B, C$ 的对边分别是 $a, b, c$ , 且 $b = 3, c = 3\sqrt{3}, B = 30^\circ$ , 则 $AB$ 边上的中线的长为 $( \quad )$

- A.  $\frac{3\sqrt{7}}{2}$       B.  $\frac{3}{4}$       C.  $\frac{3}{2}$  或  $\frac{3\sqrt{7}}{2}$       D.  $\frac{3}{4}$  或  $\frac{3\sqrt{7}}{2}$

11. 已知 $\triangle ABC$ 的内角 $A, B, C$ 的对边分别是 $a, b, c$ , 且 $(a^2 + b^2 - c^2) \cdot (a\cos B + b\cos A) = abc$ , 若 $\triangle ABC$ 的外接圆半径为 $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ , 则 $\triangle ABC$ 的周长的取值范围为 $( \quad )$

- A.  $(2, 4]$       B.  $(4, 6]$       C.  $(4, 6)$       D.  $(2, 6]$

12. 已知 $\odot O$ 是等边 $\triangle ABC$ 的外接圆, 其半径为4,  $M$ 是 $\triangle ABC$ 所在平面内的动点, 且 $|OM| = 1$ , 则 $|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}|$ 的最大值为 $( \quad )$

- A. 4      B. 6      C. 8      D. 10

二、填空题: 本大题共4小题, 每小题5分, 共20分, 把答案填在答题卡的相应位置.

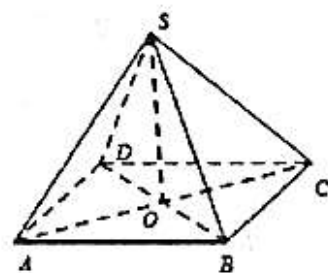
13. 如图, 棱长均为2的正四棱锥的体积为\_\_\_\_\_

14. 已知向量 $\vec{a}, \vec{b}$ 满足 $|\vec{a}| = 5, |\vec{a} - \vec{b}| = 6, |\vec{a} + \vec{b}| = 4$ ,

则向量 $\vec{b}$ 在向量 $\vec{a}$ 上的投影为\_\_\_\_\_.

15. 若关于 $x$ 的不等式 $ax^2 + bx + c > 0$ 的解集为 $(1, 2)$ , 则关

于 $x$ 不等式 $a - c(x^2 - x - 1) - bx \geq 0$ 的解集为



16. 已知在边长为2的正方形ABCD中，M，N分别为边AB，AD的中点，若P为线段MN上的动点，则 $\overrightarrow{PC} \cdot \overrightarrow{PD}$ 的最大值为\_\_\_\_\_。

三. 解答题：本大题共6小题，共70分。解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤。

17. 已知向量 $\vec{a}, \vec{b}$ 不共线， $\vec{c} = k\vec{a} + \vec{b}$ ， $\vec{d} = \vec{a} - \vec{b}$

(1) 若 $\vec{c} \parallel \vec{d}$ ，求k的值，并判断 $\vec{c}, \vec{d}$ 是否同向；

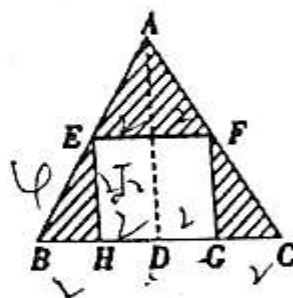
(2) 若 $|\vec{a}| = |\vec{b}|$ ， $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 夹角为 $60^\circ$ ，当k为何值时， $\vec{c} \perp \vec{d}$

18. 已知 $\triangle ABC$ 的内角A,B,C所对的边分别为a,b,c，且 $c(1 + \cos A) = \sqrt{3}a \sin C$ 。

(1) 求角A的大小；

(2) 若 $a = \sqrt{7}$ ， $b = 1$ ，求 $\triangle ABC$ 的面积。

19. 如图所示，在边长为8的正三角形ABC中，E,F依次是AB,AC的中点， $AD \perp BC$ ， $EH \perp BC$ ， $FG \perp BC$ ，D,H,G为垂足，若将 $\triangle ABC$ 绕AD旋转 $180^\circ$ ，求阴影部分形成的几何体的表面积与体积。



20. 某轮船公司的一艘轮船每小时花费的燃料费与轮船航行速度的平方成正比，比例系数为k。轮船的最大速度为15海里/小时。当船速为10海里/小时，它的燃料费是每小时96元，其余航行运作费用（不论速度如何）总计是每小时150元。假定运行过程中轮船以速度v匀速航行。

(1) 求k的值；

(2) 求该轮船航行100海里的总费用W(燃料费 + 航行运作费用)的最小值。

21. 设函数  $f(x) = ax^2 + 4x + b$ .

(1) 当  $b = 2$  时, 若对于  $x \in [1, 2]$ , 有  $f(x) \geq 0$  恒成立, 求  $a$  的取值范围;

(2) 已知  $a > b$ , 若  $f(x) \geq 0$  对于一切实数  $x$  恒成立, 并且存在  $x_0 \in \mathbb{R}$ , 使得  $ax_0^2 + 4x_0 + b = 0$  成立,

求  $\frac{a^2 + b^2}{a - b}$  的最小值.

22. 已知函数  $f(x) = \log_2(ax^2 + 2x - a)$ .

(1) 当  $a = -1$  时, 求该函数的定义域;

(2) 当  $a \leq 0$  时, 如果  $f(x) \geq 1$  对任何  $x \in [2, 3]$  都成立, 求实数  $a$  的取值范围;

(3) 若  $a < 0$ , 将函数  $f(x)$  的图像沿  $x$  轴方向平移, 得到一个偶函数  $g(x)$  的图像, 设函数  $g(x)$  的最大值为  $h(a)$ , 求  $h(a)$  的最小值.