

松江二中 2018 学年度高一数学第一学期期末考试

时间：120 分钟 满分：150 分

一、填空题（1-6 每题 4 分，7-12 每题 5 分，共 54 分）

1. 若  $\theta$  为锐角，则  $\log_{\sin \theta} (1 + \cot^2 \theta) =$  \_\_\_\_\_.

2. 已知幂函数  $y = f(x)$  的图像过点  $\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ ，则  $\log_2 f(\sqrt{2}) =$  \_\_\_\_\_.

3. 已知角  $\alpha$  的终边过点  $P(-4, 3)$ ，则  $2\sin \alpha + \cos \alpha$  的值是\_\_\_\_\_.

4. 已知扇形  $OAB$  的圆心角为  $4rad$ ，其面积是  $2cm^2$  则该扇形的周长是\_\_\_\_\_ cm

5. 已知集合  $M = \{y | y = 2^x, x > 0\}$ ,  $N = \{x | y = \lg(2x - x^2)\}$ ，则  $M \cap N$  为\_\_\_\_\_.

6. 若  $\theta \in \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$  且  $\sin \theta = -\frac{24}{25}$ ，则  $\cos \frac{\theta}{2} =$  \_\_\_\_\_.

7. 函数  $y = 3^{x^2-1} (-1 \leq x < 0)$  的反函数是\_\_\_\_\_

8. 角  $\alpha$  的顶点在原点  $O$ ，始边在  $x$  轴的正半轴，终边  $OP$  经过点  $P(-3, -4)$ ，角  $\beta$  的顶点在原点  $O$ ，始边在  $x$  轴的正半轴，终边  $OQ$  落在第二象限，且  $\tan \beta = -2$ ，则  $\cos \angle OPQ$  的值为\_\_\_\_\_

9. 有以下命题：

(1) 若函数  $f(x)$  既是奇函数，又是偶函数，则  $f(x)$  的值域为  $\{0\}$ ；

(2) 若函数  $f(x)$  是偶函数，则  $f(|x|) = f(x)$ ；

(3) 若函数  $f(x)$  在其定义域内不是单调函数，则  $f(x)$  不存在反函数；

(4) 若函数  $f(x)$  存在反函数  $f^{-1}(x)$ ，且  $f^{-1}(x)$  与  $f(x)$  不完全相同，则  $f(x)$  与  $f^{-1}(x)$  图像的公共点必在直线  $y = x$  上；

其中真命题的序号是\_\_\_\_\_（写出所有真命题的序号）

10. 已知  $f(x)$  是定义在  $[-2, 2]$  上的奇函数, 当  $x \in (0, 2]$  时,  $f(x) = 2^x - 1$ , 函数  $g(x) = x^2 - 2x + m$  如果对于任意的  $x_1 \in [-2, 2]$ , 总存在  $x_2 \in [-2, 2]$ , 使得  $f(x_1) \leq g(x_2)$ , 则实数  $m$  的取值范围是\_\_\_\_\_.

11. 已知函数  $f(x) = \begin{cases} 2^{-x} - 1 & (x \leq 0) \\ f(x-1) & (x > 0) \end{cases}$ , 若关于  $x$  方程  $f(x) = ax$  有三个不相等的实数根, 则实数  $a$  的取之范围是\_\_\_\_\_.

12. 函数  $f(x)$  的定义域为  $D$ , 若存在闭区间  $[a, b] \subseteq D$ , 使得函数  $f(x)$  满足: ①  $f(x)$  在  $[a, b]$  内是单调函数; ②  $f(x)$  在  $[a, b]$  上的值域为  $[2a, 2b]$ , 则称区间  $[a, b]$  为  $y = f(x)$  的“倍值区间”. 下列函数中存在“倍值区间”的有\_\_\_\_\_

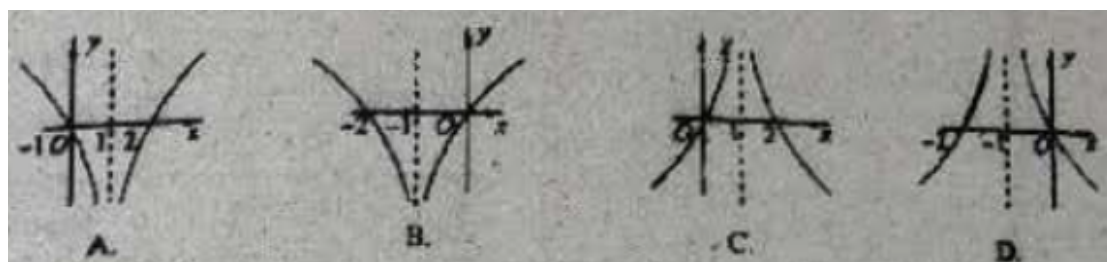
①  $f(x) = x^2 (x \geq 0)$       ②  $f(x) = e^2 (x \in R)$       ③  $f(x) = \frac{4x}{x^2 + 1} (x \geq 0)$

二、选择题 (每题 5 分, 共 20 分)

13. 在  $\triangle ABC$  中,  $\cos A \cos B > \sin A \sin B$ , 则  $\triangle ABC$  为 ( )

- A. 锐角三角形      B. 钝角三角形      C. 直角三角形      D. 无法判定

14. 函数  $y = \lg \frac{1}{|x+1|}$  的大致图像为 ( )



15. 已知函数  $f(x) = \log_2(x^2 - ax + 3a)$  在区间  $[2, +\infty)$  上是增函数, 则  $a$  的取值范围是 ( )

- A.  $(-\infty, 2]$       B.  $(-\infty, 4]$       C.  $(-4, 2]$       D.  $(-4, 4]$

16. 已知函数  $f(x) = a \cdot 2^{|x|} + 1 (a \neq 0)$ , 定义函数  $F(x) = \begin{cases} f(x), & x > 0 \\ -f(x), & x < 0 \end{cases}$  给出下列命题:

①  $F(x) = |f(x)|$ ; ② 函数  $F(x)$  是奇函数; ③ 当  $a < 0$ , 若  $mn < 0, m+n > 0$ , 总有

$F(m) + F(n) < 0$  成立, 其中所有正确命题的序号是 ( )

A. ②

B. ①②

C. ②③

D. ①②③

三、解答题 (共 76 分) 请写出必要的解答步骤

17. (本题满分 12 分)

已知  $0 < \alpha < \frac{\pi}{2} < \beta < \pi, \cos \alpha = \frac{3}{5}, \sin(\alpha + \beta) = \frac{5}{13}$ , 求  $\cos \beta$  的值.

18. (本题满分 14 分, 第 1 题 6 分, 第 2 题 8 分)

设函数  $f(x) = x^2 + \frac{a}{x}$  ( $x \neq 0$ , 常数  $a \in \mathbb{R}$ )

(1) 讨论函数  $f(x)$  的奇偶性, 并说明理由.

(2) 若函数  $f(x)$  在  $x \in [2, +\infty)$  上为增函数, 求实数  $a$  的取值范围.

19. (本题满分 14 分, 第 1 题 6 分, 第 2 题 8 分)

已知二次函数  $f(x) = mx^2 - 2x - 3$ , 若不等式  $f(x) < 0$  的解集为  $(-1, 0)$

(1) 解关于  $x$  的不等式,  $2x^2 - 4x + n > (m+1)x - 1$

(2) 已知实数  $a \in (0, 1)$ , 且关于  $x$  的函数  $y = f(a^x) - 4a^{x+1}$  ( $x \in [1, 2]$ ) 的最小值为  $-4$ , 求  $a$  的值.

20. (本题满分 16 分, 第 1 小题 8 分, 第 2 小题 8 分)

已知指数函数  $y = g(x)$  满足:  $g(3) = 8$ , 又定义域为  $\mathbb{R}$  的函数  $f(x) = \frac{n - g(x)}{m + 2g(x)}$  的奇函数

(1) 确定  $y = g(x)$  的解析式, 并求  $m, n$  的值;

(2) 若对任意的  $t \in \mathbb{R}$ , 不等式  $f(2t - 3t^2) + f(t^2 - k) > 0$  恒成立, 求实数  $k$  的取值范围.

21. (本题满分 18 分, 第 1 小题 4 分, 第 2 小题 6 分, 第 3 小题 8 分)

已知函数  $f(x)$  满足  $f(x+a) = -\frac{1}{x} - 1 (a \in R)$ .

(1) 若  $f(x)$  的定义域为  $(-\infty, a) \cup (a, +\infty)$ , 且  $f(x) + f(2a-x) = m$  对定义域内所有  $x$  都成立, 求  $m$ ;

(2) 若  $f(x)$  的定义域为  $\left[a + \frac{1}{2}, a+1\right]$  时, 求  $f(x)$  的值域;

(3) 若  $f(x)$  的定义域为  $(-\infty, a) \cup (a, +\infty)$ , 设函数  $g(x) = x^2 + |(x-a)f(x)|$ , 当  $a \geq \frac{1}{2}$  时, 求  $g(x)$  的最小值.