

大同中学 2018 学年度第一学期期末测试

高一年级数学（时间 90 分钟，满分 100 分，共 4 题）

班级姓名学号

一、填空题(4×10=40)

1. 与  $-600^\circ$  终边相同的最小正角的弧度数是\_\_\_\_\_.

2. 已知扇形的圆心角为 2，半径为 1，则扇形的面积为\_\_\_\_\_.

3. 设常数，函数  $f(x) = 2^{x+a}$ ，若  $f(x)$  的反函数图像经过点 (8,1)，则  $a =$ \_\_\_\_\_.

4. 函数  $y = \frac{1}{\log_2 x}$  的定义域是\_\_\_\_\_.

5. 若  $\tan \theta = 2$ ，且  $\theta$  是第三象限角，则  $\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) =$ \_\_\_\_\_.

6. 已知  $\sin \alpha + \cos \alpha = \frac{1}{5}$ ，则  $\sin \alpha \cdot \cos \alpha =$ \_\_\_\_\_.

7. 已知  $\alpha \in \left\{-2, -1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, 2, 3\right\}$ ，若幂函数  $f(x) = x^\alpha$  奇函数，且在  $(0, +\infty)$  上递减，  
则  $\alpha =$ \_\_\_\_\_.

8. 已知函数  $f(x) = \log_a(2 - ax)$  在  $x \in [0, 1]$  上是减函数，则  $a$  的取值范围是\_\_\_\_\_.

9. 若函数  $f(x) = \begin{cases} \left(\frac{1}{2}\right)^{x-\frac{3}{2}}, & x \leq \frac{1}{2} \\ \log_a x, & x > \frac{1}{2} \end{cases}$  ( $a > 0$  且  $a \neq 1$ ) 的值域是  $\mathbf{R}$ ，则实数  $a$  的取值范围是  
\_\_\_\_\_.

10. 已知函数  $f(x) = m(x - m)(x + m + 2)$  和  $g(x) = 3^x - 3$  同时满足以下两个条件:

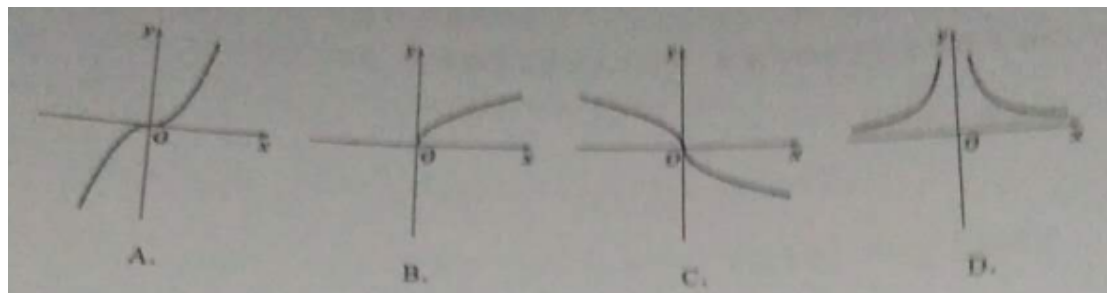
① 对任意实数  $x$  都有  $f(x) < 0$  或  $g(x) < 0$ ;

② 总存在  $x_0 \in (-\infty, -2)$ ，使  $f(x_0) \cdot g(x_0) < 0$  成立，

则  $m$  的取值范围是\_\_\_\_\_.

二、选择题 (4×4=16)

11 已知函数  $f(x)=x^k$  ( $k$  为常数,  $k \in \mathbb{Q}$ ), 在下列函数图像中, 不是函数  $y=f(x)$  的图像的是 ( )



12. “ $b < 1$ ” 是 “函数  $f(x)=x^2-2bx, x \in [1, +\infty)$  有反函数” 的 ( )

A. 充分非必要条件    B. 必要非充分条件    C. 充要条件    D. 即非充分又非必要条件

13. 在平面直角坐标系中,  $O$  为坐标原点,  $A$  为单位圆上一点, 以  $x$  轴为始边,  $OA$  为终边的角为  $\theta$ , 若将  $OA$  绕  $O$  点顺时针旋转  $\frac{3\pi}{2}$  至  $OB$ , 则点  $B$  的坐标为 ( )

A.  $(-\cos \theta, \sin \theta)$     B.  $(\cos \theta, -\sin \theta)$     C.  $(-\sin \theta, \cos \theta)$     D.  $(\sin \theta, -\cos \theta)$

14. 若关于  $x$  的方程  $|f(|x|)|=a$ , 当  $a > 0$  时总有 4 个解, 则  $f(x)$  可以是 ( )

A.  $x^2-1$     B.  $\frac{1}{x-1}$     C.  $2^x-2$     D.  $\log_q x-2$

三、解答题 (8'+8'+8'+8'+12'=44')

15. 设函数  $f(x)=3^x, g(x)=9^x$

(1) 解方程:  $g(x)-8f(x)-g(1)=0$ ;

(2) 令  $h(x)=\frac{f(x)}{f(x)+\sqrt{3}}$ , 求  $h\left(\frac{1}{2019}\right)+h\left(\frac{2}{2019}\right)+h\left(\frac{3}{2019}\right)+\cdots+h\left(\frac{2018}{2019}\right)$  的值.

16. 已知  $\cos \alpha = -\frac{3}{5}$ ,  $\alpha \in (\pi, 2\pi)$ .

(1) 求  $\cos 2\alpha$  的值;

(2) 若角  $\beta$  的顶点与坐标原点重合, 始边与  $x$  轴的正半轴重合, 且终边经过点  $(3, -1)$ , 求  $\tan(\alpha - \beta)$  的值.

17. 已知函数  $f(x) = \log_2(x - m)$ , 其中  $m \in R$ .

(1) 若函数  $f(x)$  在区间  $(2, 3)$  内有一个零点, 求  $m$  的取值范围;

(2) 若函数  $f(x)$  在区间  $[1, t]$  ( $t > 1$ ) 上的最大值与最小值之差为 2, 且  $f(t) > 0$ , 求  $m$  的取值范围

18. 设  $a > 0$ , 函数  $f(x) = \frac{1}{1+a \cdot 2^x}$ ,

(1) 若  $a = 1$ , 求  $f(x)$  的反函数  $f^{-1}(x)$ ;

(2) 设  $g(x) = f(x) - f(x-1)$ , 若对任意  $x \in (-\infty, 0]$ ,  $g(x) \geq g(0)$  恒成立, 求  $a$  的取值范围.

19. 对于函数  $f_1(x)$ 、 $f_2(x)$ , 如果存在实数  $a$ 、 $b$  使得  $F(x) = a \cdot f_1(x) + b \cdot f_2(x)$ , 那么称  $F(x)$  为  $f_1(x)$ 、 $f_2(x)$  的线性函数.

(1) 下面给出两组函数, 判断  $F(x)$  是否分别为  $f_1(x)$ 、 $f_2(x)$  的线性函数? 并说明理由;

第一组:  $f_1(x) = \lg \frac{x}{10}$ ,  $f_2(x) = \lg(10x)$   $F(x) = \lg x$

第二组:  $f_1(x) = x^2 - x$ ,  $f_2(x) = x^2 + x + 1$   $F(x) = x^2 - x + 1$

(2) 设  $f_1(x) = \log_2 x$ ,  $f_2(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$   $a = 2$   $b = 1$ , 线性函数为  $F(x)$ . 若等式

$3F^2(x) + 2F(x) + t = 0$  在  $x \in [2, 4]$  上有解, 求实数  $t$  的取值范围;

(3) 设  $f_1(x) = x(x > 0)$ ,  $f_2(x) = \frac{1}{x}(x > 0)$ , 取  $a > 0$ ,  $b > 0$ . 线性函数  $F(x)$  图像的最低点为

(2, 8). 若对于任意正实数  $x_1$ 、 $x_2$  且  $x_1 + x_2 = 1$ . 试问是否存在最大的常数  $m$ , 使

$F(x_1)F(x_2) \geq m$  恒成立? 如果存在, 求出这个  $m$  的值; 如果不存在, 请说明理由.