

2018-2019 学年 (上) 期末考试

高 2020 级数学 (理科) 试题

考试说明: 1. 考试时间 120 分钟

2. 试题总分 150 分

3. 试卷页数 4 页

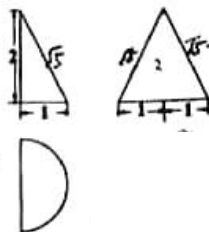
一. 选择题 (本大题共 12 小题, 每小题 5 分, 共 60 分. 在每小题给出的四个备选项中, 只有一项是符合题目要求的, 把答案填涂在答题卡相应位置上)

1. 直线  $\sqrt{3}x + y + 1 = 0$  的倾斜角的大小为 ( )  
A.  $30^\circ$  B.  $60^\circ$  C.  $120^\circ$  D.  $150^\circ$
2. “ $a=1$ ”是“直线  $l_1: ax - y + 8 = 0$  与直线  $l_2: 2x - (a+1)y + 3 = 0$  互相平行”的 ( )  
A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件 C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件
3. 命题“存在  $x_0 \in \mathbb{R}$ , 使得  $x_0^2 - 2x_0 + 1 < 0$ ”的否定为 ( B )  
A. 任意  $x \in \mathbb{R}$ , 都有  $x^2 - 2x + 1 > 0$  B. 任意  $x \in \mathbb{R}$ , 都有  $x^2 - 2x + 1 \geq 0$   
C. 任意  $x \in \mathbb{R}$ , 都有  $x^2 - 2x + 1 \leq 0$  D. 不存在  $x \in \mathbb{R}$ , 使得  $x^2 - 2x + 1 \geq 0$
4. 已知正四棱柱  $ABCD - A_1B_1C_1D_1$  中,  $AA_1 = 2AB$ ,  $E$  为  $AA_1$  中点, 则异面直线  $BE$  与  $CD_1$  所成角的正切值为 ( )  
A.  $-\frac{3\sqrt{10}}{10}$  B.  $\frac{1}{3}$  C. 3 D.  $\frac{3\sqrt{10}}{10}$
5. 过点  $(-4, 2)$ , 且与双曲线  $y^2 - \frac{x^2}{2} = 1$  有相同渐近线的双曲线的方程是 ( )  
A.  $\frac{x^2}{8} - \frac{y^2}{4} = 1$  B.  $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{8} = 1$  C.  $\frac{y^2}{8} - \frac{x^2}{4} = 1$  D.  $\frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{8} = 1$

6. 某几何体的三视图如图所示, 其中俯视图是个半圆,

则该几何体的表面积为 ( )

- A.  $2 + \sqrt{5}\pi$  B.  $2 + \frac{\sqrt{5}}{2}\pi$  C.  $2 + \frac{1 + \sqrt{5}}{2}\pi$  D.  $2 + (1 + \sqrt{5})\pi$



7. 过坐标原点  $O$  作圆  $(x-2)^2 + (y-3)^2 = 4$  的两条切线, 切点为  $A, B$ , 直线  $AB$  被圆截得弦  $AB$  的长度为 ( )

- A.  $\sqrt{13}$  B.  $\frac{12\sqrt{13}}{13}$  C.  $\frac{6\sqrt{13}}{13}$  D.  $\frac{5\sqrt{13}}{13}$

8. 若点  $(m, n)$  在椭圆  $9x^2 + y^2 = 9$  上, 则  $\frac{n}{m-3}$  的最小值为 ( )

- A.  $-\frac{2\sqrt{2}}{3}$  B.  $-\frac{2\sqrt{3}}{3}$  C.  $-\frac{\sqrt{3}}{2}$  D.  $-\frac{3\sqrt{2}}{4}$

9. 设  $O$  为坐标原点,  $P$  是以  $F$  为焦点的抛物线  $y^2 = 2px (p > 0)$  上任意一点,  $M$  是线段  $PF$  上的点, 且  $\overline{FP} = 5\overline{FM}$ , 则直线  $OM$  的斜率的最大值为 ( )

- A.  $\frac{\sqrt{3}}{3}$  B.  $\frac{2}{3}$  C.  $\frac{\sqrt{2}}{2}$  D.  $\frac{1}{2}$

10. 如图, 四边形  $ABCD$  是边长为 1 的正方形,  $MD \perp ABCD$ ,  $NB \perp ABCD$ , 且  $MD = NB = 1$ , 则下列结论中:

- ①  $MC \perp AN$  ②  $DB \parallel$  平面  $AMN$  ③ 平面  $CMN \perp$  平面  $AMN$   
④ 平面  $DCM \parallel$  平面  $ABN$  所有假命题的个数是 ( )

- A. 0 B. 1 C. 2 D. 3

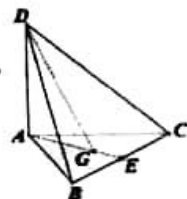
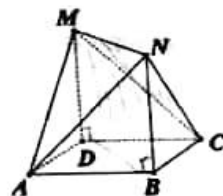
11. 在四面体  $ABCD$  中,  $AD \perp$  底面  $ABC$ ,  $AB = AC = \sqrt{10}$ ,  $BC = 2$ ,  $E$  为棱  $BC$  的中点, 点  $G$  在  $AE$  上且满足  $AG = 2GE$ , 若四面体  $ABCD$  的外接球的表面积为  $\frac{172}{9}\pi$ , 则  $\tan \angle AGD = ( )$

- A.  $\frac{1}{2}$  B.  $\frac{\sqrt{2}}{2}$  C.  $\sqrt{2}$  D. 2

12. 已知双曲线  $\Gamma: \frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$  的上焦点为  $F(0, c) (c > 0)$ ,  $M$  是双曲线下支上的一点, 线段  $MF$  与圆  $x^2 + y^2 - \frac{c}{2}y + \frac{a^2}{16} = 0$  相切于点  $D$ , 且  $|DF| = \frac{3}{8}|MF|$ .

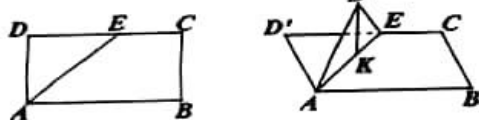
则双曲线  $\Gamma$  的渐近线方程为 ( )

- A.  $\sqrt{2}x \pm y = 0$  B.  $x \pm \sqrt{2}y = 0$  C.  $6x \pm 7y = 0$  D.  $7x \pm 6y = 0$



二、填空题 (本大题满分 20 分, 共有 4 个小题, 只要求将最终结果直接填写在答题纸相应的横线上, 每个空格填对得 5 分, 否则一律得零分).

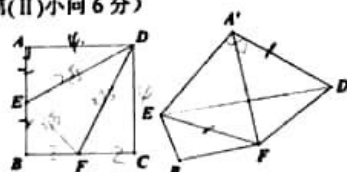
13. 直线  $x - 4y + k = 0$  在两坐标轴上截距之和为 5, 则  $k =$  \_\_\_\_\_
14. 过抛物线  $C: y^2 = 4x$  的焦点  $F$  的直线, 交抛物线一象限于点  $A$ , 若  $|AF| = 3$  ( $O$  为坐标原点), 则直线  $OA$  倾斜角的正弦值为 \_\_\_\_\_.
15. 已知圆柱的底面半径为 2, 用与圆柱底面成  $60^\circ$  角的平面截这个圆柱得到一个椭圆, 则该椭圆的离心率为 \_\_\_\_\_.
16. 如图, 在长方形  $ABCD$  中,  $AB = \sqrt{6}, BC = \sqrt{2}$ .  $E$  为线段  $DC$  上一动点, 现将  $\triangle AED$  沿  $AE$  折起, 使点  $D$  在面  $ABC$  上的射影  $K$  在直线  $AE$  上, 当  $E$  从  $D$  运动到  $C$ , 则  $K$  所形成轨迹的长度为 \_\_\_\_\_.



三、解答题 (本大题共 70 分)

17. (本小题满分 10 分, 共 2 小问, 第(I)小问 4 分, 第(II)小问 6 分)

如图, 边长为 4 的正方形  $ABCD$  中, 点  $E$  是  $AB$  的中点, 点  $F$  是  $BC$  中点, 将  $\triangle AED, \triangle DCF$  分别沿  $DE, DF$  折起, 使  $A, C$  两点重合于点  $A'$ .



(I) 求证  $A'D \perp EF$ ; (II) 求三棱锥  $A'-EFD$  的体积.

18. (本小题满分 12 分, 共 2 小问, 第(I)小问 5 分, 第(II)小问 7 分)

已知圆  $M$  过两点  $A(1, -1), B(-1, 1)$ , 且圆心  $M$  在  $x + y - 2 = 0$  上.

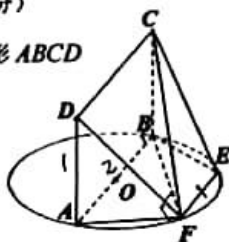
(I) 求圆  $M$  的方程; (II) 设  $P$  是直线  $x + y + 2 = 0$  上的动点,  $PC, PD$  是圆  $M$  的两条切线,  $C, D$  为切点, 求四边形  $PCMD$  面积的最小值.

19. (本小题满分 12 分, 共 2 小问, 第(I)小问 5 分, 第(II)小问 7 分)

如图,  $AB$  为圆  $O$  的直径, 点  $E, F$  在圆  $O$  上,  $AB \parallel EF$ , 矩形  $ABCD$  所在的平面与圆  $O$  所在的平面互相垂直. 已知  $AB = 2, EF = 1$ .

(I) 求证: 平面  $DAF \perp$  平面  $CBF$ ;

(II) 当  $AD = 1$  时, 求直线  $FB$  与平面  $DFC$  所成角的正弦值.



20. (本小题满分 12 分, 共 2 小问, 第(I)小问 4 分, 第(II)小问 8 分)

已知点  $A(x_1, y_1), D(x_2, y_2)$  (其中  $x_1 < x_2$ ) 是曲线  $y^2 = 9x (y \geq 0)$  上的两点,  $A, D$  两点在  $x$  轴上的射影分别为点  $B, C$ , 且  $|BC| = 3$ .

(I) 当点  $B$  的坐标为  $(1, 0)$  时, 求直线  $AD$  的方程;

(II) 记  $\triangle OAD$  的面积为  $S_1$ , 梯形  $ABCD$  的面积为  $S_2$ , 求  $\frac{S_1}{S_2}$  的范围.

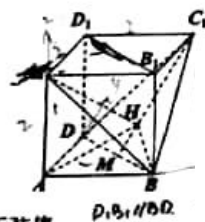
21. (本小题满分 12 分, 共 2 小问, 第(I)小问 4 分, 第(II)小问 8 分)

如图, 在多面体  $ABD - A_1B_1C_1D_1$  中, 四边形  $A_1B_1C_1D_1$ ,

$ADD_1A_1, ABB_1A_1$  均为正方形, 点  $M$  是  $BD$  的中点, 点  $H$

在线段  $C_1M$  上, 且  $A_1H$  与平面  $ABD$  所成角的正弦值为  $\frac{\sqrt{22}}{11}$ .

(I) 证明:  $B_1D_1 \parallel$  平面  $BC_1D$ ; (II) 求二面角  $A - A_1H - B$  的正弦值.



22. (本小题满分 12 分, 共 3 小问, 第(I)小问 3 分, 第(II)小问 4 分, 第(III)小问 5 分)

阅读下列有关光线的入射与反射的两个事实现象:

现象(1): 光线经平面镜反射满足入射角与反射角相等(如图);

现象(2): 光线从椭圆的一个焦点出发经椭圆反射后通过另一个焦点(如图).

试结合上述事实现象完成下列问题:

- (I) 有一椭圆型台球桌, 长轴长为  $2a$ , 短轴长为  $2b$ . 将一放置于焦点处的桌球击出, 经过球桌边缘的反射(假设球的反射完全符合现象(1))后第一次返回到该焦点时所经过的路程记为  $S$ , 求  $S$  的值(用  $a, b$  表示);

(II) 结论: 椭圆  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  上任一点  $P(x_0, y_0)$  处的切线的方程为  $\frac{x_0x}{a^2} + \frac{y_0y}{b^2} = 1$ . 记

椭圆  $C$  的方程为  $C: \frac{x^2}{9} + y^2 = 1$ . 在直线  $x = 4$  上任一点  $M$  向椭圆  $C$  引切线, 切点

分别为  $A, B$ , 求证: 直线  $AB$  恒过一定点;

- (III) 过点  $T(1, 0)$  的直线  $l$  (直线  $l$  斜率不为 0) 与

椭圆  $C: \frac{x^2}{9} + y^2 = 1$  交于  $P, Q$  两点, 是否存在定点  $S(s, 0)$ , 使得直线  $SP$  与  $SQ$  斜率之积为定值, 若存在求出  $S$  坐标; 若不存在请说明理由.

