安阳市第二中学 2018-2019 学年第一学期期末考试

高二理科数学试卷

命题人：赵拥军

一、选择题：本大题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分. 在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1、a、b、c 分别是 ΔABC 内角 A、B、C 的对边. 若 $a=4$，$b=3$，$B=45°$，则 ΔABC 的解的情况是(　　)

(A)有两个解　　(B)有一个解　　(C)无解　　(D)不能确定

2、在等差数列 $\{a_n\}$ 中，已知 $a_7-2a_4=-1$，$a_3=0$，那么公差 $d=$(　　)

(A) -2　　(B) $-\dfrac{1}{2}$　　(C) $\dfrac{1}{2}$　　(D) 2

3、方程 $x^2+xy=|x|$ 所表示的曲线关于(　　)

(A) x 轴对称　　(B) y 轴对称　　(C)原点对称　　(D)直线 $y=x$ 对称

4、若 $a>b>0$，则下列不等式总成立的是(　　)

(A) $a-\dfrac{1}{a}>b-\dfrac{1}{b}$　　(B) $a+\dfrac{1}{a}>b+\dfrac{1}{b}$　　(C) $\dfrac{b}{a}>\dfrac{b+1}{a+1}$　　(D) $\dfrac{2a+b}{a+2b}>\dfrac{a}{b}$

5、在等比数列 $\{a_n\}$ 中，$a_2=2$，$a_5=\dfrac{1}{4}$，则数列 $\{a_na_{n+1}\}$ 的前 n 项和为(　　)

(A) $\dfrac{32}{3}(1-\dfrac{1}{4^{n-1}})$　　(B) $\dfrac{32}{3}(1-\dfrac{1}{4^n})$　　(C) $2(1-\dfrac{1}{2^{n-1}})$　　(D) $2(1-\dfrac{1}{2^n})$

6、已知点 F 为双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 的右焦点，过 F 作斜率为 -1 的直线交双曲线的一条渐近线于点 M（M 在第一象限），若 ΔOMF 的面积为 $\dfrac{a^2+b^2}{8}$，其中 O 为坐标原点. 则该双曲线的离心率为(　　)

(A) $\dfrac{\sqrt{5}}{2}$　　(B) $\dfrac{\sqrt{7}}{2}$　　(C) $\dfrac{\sqrt{10}}{3}$　　(D) $\dfrac{\sqrt{15}}{3}$

7、设 a，b 为实数，则“$0<ab<1$”是“$b<\dfrac{1}{a}$”的(　　)

(A)充分不必要条件　　(B)必要不充分条件

(C)充要条件　　　　　　　　　　　　(D)既不充分也不必要条件

8、若正数x，y满足$x+3y=5xy$，则$3x+4y$的最小值是(　　)

(A) $\dfrac{24}{5}$　　(B) $\dfrac{28}{5}$　　(C) 5　　(D) 6

9、不等式$(1+x)(1-|x|)>0$的解集是(　　)

(A) $\{x|0\leqslant x<1\}$　　　　(B) $\{x|x<0\text{ 且 }x\neq -1\}$

(C) $\{x|-1<x<1\}$　　　　(D) $\{x|x<1\text{ 且 }x\neq -1\}$

10、已知函数$f(x)=2x\sqrt{9-2x}\ (0<x<4)$，则下面命题中的假命题是(　　)

(A) $\forall x\in(0,\ 4)$，$f(x)\leqslant 6\sqrt{3}$　　　　(B) $\forall x\in(0,\ 4)$，$f(x)\geqslant 6\sqrt{3}$

(C) $\exists x_0\in(0,\ 4)$，$f(x_0)\geqslant 6\sqrt{3}$　　　　(D) $\exists x_0\in(0,\ 4)$，$f(x_0)\leqslant 6\sqrt{3}$

11、参数方程$\begin{cases}x=1+4\cos^2\theta\\ y=-3\sin^2\theta\end{cases}$（$\theta$为参数)所表示的图形是(　　)

(A)直线　　(B)射线　　(C)线段　　(D)椭圆

12、若点$(x,\ y,\ z)$与点$(-1,\ 2,\ -1)$之间的距离为$\sqrt{7}$，则$3x+2y+z$的最大值是(　　)

(A) $7\sqrt{2}$　　(B) 7　　(C) $\sqrt{7}$　　(D) $\sqrt{14}$

二、填空题：本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13、变量x，y满足条件$\begin{cases}1\leqslant x+y\leqslant 4\\ -2\leqslant x-y\leqslant 2\end{cases}$，若目标函数$z=ax+y$（$a>0$）仅在点$(3,\ 1)$处取得最大值，则$a$的取值范围是______________.

14、已知点F是抛物线$y^2=2px\ (p>0)$的焦点，点M在抛物线上，点N在准线上，且ΔMNF是边长为2的正三角形. 则$p=$________________.

15、在数列$\{a_n\}$中，$a_1=60$，$a_{n+1}=a_n+2n$（$n\in\mathbf{N}^*$），则$\dfrac{a_n}{n}$的最小值为_____.

16、已知 p:“关于 x 的不等式 $x^2+mx+1<0$ 有解”；q:“$2x^2-mxy+y^2\geqslant 0$ 对任意的 $x\in[1,\ 2]$，$y\in[1,\ 3]$ 恒成立”．若“$p\wedge q$”为真命题，则实数 m 的取值范围是______________________________.

三、解答题：解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤.

17、(本小题满分 12 分)已知 a，b，c 分别是 ΔABC 三个内角 A，B，C 的对边，$c=\sqrt{3}a\sin C-c\cos A$.

(1)求 A；

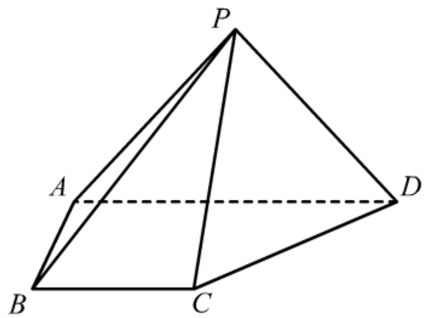
(2)若 $a=2$，ΔABC 的面积为 $\sqrt{3}$，求 b，c.

18、(本小题满分 12 分)如图所示，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，底面四边形 $ABCD$ 为直角梯形，$BC\,/\!/\,AD$，$AB\perp AD$，$AB=BC=1$．侧面 $PAD\perp$ 底面 $ABCD$，侧棱 $PA\perp PD$，$PA=PD=\sqrt{2}$.

(1)求直线 PB 与平面 $ABCD$ 所成角的正弦值；

(2)求点 B 到平面 PCD 的距离；

(3)在线段 PD 上是否存在一点 Q，使得二面角 $Q-AC-D$ 的余弦值为 $\frac{\sqrt{6}}{3}$？若存在，求出 $\frac{PQ}{QD}$ 的值；若不存在，说明理由.



19、(本小题满分 12 分)已知 S_n 是数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，当 $n\in\mathbf{N}^*$ 时，$3a_n=2S_n+3$ 总成立.

(1)求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

(2)设 $b_n=1+2\log_3 a_n$，T_n 是数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和，求 $\frac{1}{T_1}+\frac{1}{T_2}+\cdots\frac{1}{T_n}$；

(3)试比较 $\left|\frac{1}{T_1}+\frac{1}{T_2}+\cdots+\frac{1}{T_n}-\frac{3}{4}\right|$ 与 $\frac{1}{1000}$ 的大小.

20、(本小题满分 12 分)椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\left(a>b>0\right)$ 的长轴一端与短轴两端正好可连成等边三角形，以短轴为直径的圆经过点 $M\left(1,\ 0\right)$.

(1)求该椭圆的方程；

(2)过点 $M\left(1,\ 0\right)$ 的直线 l 交椭圆于 P、Q 两点，又定点 N 的坐标为 $\left(3,\ 2\right)$，记直线 PN，QN 的斜率分别为 k_1，k_2，求证 k_1+k_2 为定值.

21、(本小题满分 12 分)在直角坐标系 xOy 中，以 O 为极点，x 轴正半轴为极轴建立极坐标系. 曲线 C_1 的参数方程为 $\begin{cases} x=2\cos\alpha+\sqrt{3} \\ y=2\sin\alpha+1 \end{cases}$（$\alpha$ 为参数），曲线 C_2 的极坐标方程为 $\rho=2\cos\theta$.

(1)求曲线 C_1 的极坐标方程；

(2)若射线 $\theta=\frac{\pi}{6}$（$\rho\geqslant 0$）分别交曲线 C_1、C_2 于 A、B（A、B 异于原点），求 $\left|AB\right|$.

22、(本小题满分 10 分)已知函数 $f\left(x\right)=\left|2x-a\right|+\left|2x+3\right|$，$g\left(x\right)=\left|x-1\right|+2$.

(1)解不等式 $g\left(x\right)<5$；

(2)若 $\forall x_1\in\mathbf{R}$，$\exists x_2\in\mathbf{R}$，使得 $f\left(x_1\right)=g\left(x_2\right)$成立，求 a 的取值范围.

安阳市第二中学 2018–2019 学年第一学期期末考试

高二理科数学参考答案

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
选项	A	B	C	A	B	C	D	C	D	B	C	A

13、$(1,\ +\infty)$　　14、1　　15、$\dfrac{29}{2}$　　16、$(-\infty,\ -2)\cup\left(2,\ 2\sqrt{2}\right]$

17、解：（1）由正弦定理 $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}=k\ (k>0)$，

得 $a=k\sin A,\ b=k\sin B,\ c=k\sin C$，代入已知条件，化简，

得 $\sin C=\sqrt{3}\sin A\sin C-\sin C\cos A$ --------2’

由 $0<C<\pi$，$\sin C>0$ 得 $1=\sqrt{3}\sin A-\cos A=2\sin(A-\dfrac{\pi}{6})$，$\sin(A-\dfrac{\pi}{6})=\dfrac{1}{2}$ ----4’

又 $0<A<\pi,\ -\dfrac{\pi}{6}<A-\dfrac{\pi}{6}<\dfrac{5\pi}{6}$，$A-\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{\pi}{6},\ A=\dfrac{\pi}{3}$ --------6’

（2）由 $S_{\Delta}=\dfrac{1}{2}bc\sin A$，即 $\sqrt{3}=\dfrac{1}{2}bc\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，得 $bc=4$ --------8’

由余弦定理 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$，即 $4=b^2+c^2-2bc\times\dfrac{1}{2}$，得 $b^2+c^2=8$ --10’

解得 $b=c=2$ --------12’

18、解：（1）取 AD 的中点 O，连接 PO，$\because PA=PD$，$\therefore PO\perp AD$

又面 $PAD\perp$ 面 $ABCD$，面 $PAD\cap$ 面 $ABCD=AD$，$\therefore PO\perp$ 面 $ABCD$

连接 OB，则 OB 是 PB 在面 $ABCD$ 内的射影，$\angle PBO$ 是 PB 与平面 $ABCD$ 所成的角. ---2’

由 $PA\perp PD$，$PA=PD=\sqrt{2}$，得 $AD=2$，$AO=OD=1$

又 $AB\perp AD$，$BC\ //\ AD$，$AB=BC=1$，连接 OC，则四边形 $ABCO$ 为正方形，

所以 $OB=\sqrt{2}$，$PB=\sqrt{3}$，$\sin\angle PBO=\dfrac{1}{\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ ----4’

（2）显然 $OC\perp OD$，$OC\perp OP$，$OP\perp OD$，建立空间右手直角坐标系如图，可得如下坐标：$O(0,\ 0,\ 0)$，$A(0,\ -1,\ 0)$，$B(1,\ -1,\ 0)$，$C(1,\ 0,\ 0)$，$D(0,\ 1,\ 0)$，$P(0,\ 0,\ 1)$ --------6’

则 $\overrightarrow{DC}=(1,\ -1,\ 0)$，$\overrightarrow{PC}=(1,\ 0,\ -1)$，设 $\overrightarrow{m}=(a,\ b,\ c)$ 是平面 PCD 的法向量，

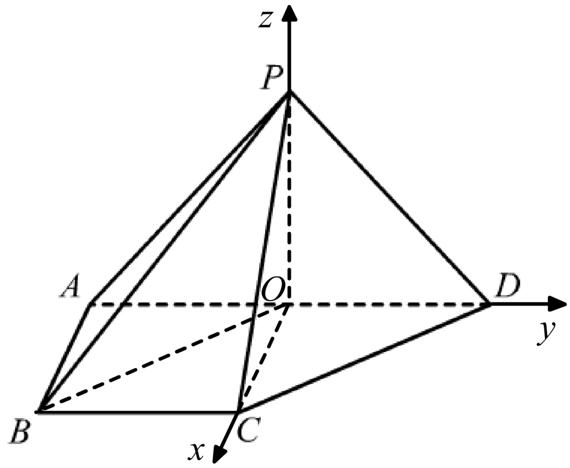
由$\overrightarrow{m}\cdot\overrightarrow{DC}=0$，$\overrightarrow{m}\cdot\overrightarrow{PC}=0$，

令$a=1$得$\overrightarrow{m}=(1,\ 1,\ 1)$

又$\overrightarrow{PB}=(1,\ -1,\ -1)$

所以点 B 到平面 PCD 的距离

$d=\dfrac{\left|\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{m}\right|}{\left|\overrightarrow{m}\right|}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ ---8’



（3）假设点Q存在，由题意

$\overrightarrow{OQ}=\lambda\overrightarrow{OD}+(1-\lambda)\overrightarrow{OP}$

$=(0,\ \lambda,\ 1-\lambda)$，即点$Q$的坐标为$Q(0,\ \lambda,\ 1-\lambda)$ $(0<\lambda<1)$ --------10’

设$\overrightarrow{n}=(x,\ y,\ z)$是平面$QAC$的法向量，$\overrightarrow{AC}=(1,\ 1,\ 0)$，$\overrightarrow{CQ}=(-1,\ \lambda,\ 1-\lambda)$，

由$\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{CQ}=0$，令$x=1$，得$\overrightarrow{n}=(\ 1,\ -1,\ \dfrac{1+\lambda}{1-\lambda}\ )$

又$\overrightarrow{OP}=(0,\ 0,\ 1)$是平面$ACD$的法向量，所以二面角$Q-AC-D$的余弦值为.

$$\frac{\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{OP}}{\left|\overrightarrow{n}\right|\left|\overrightarrow{OP}\right|}=\frac{\frac{1+\lambda}{1-\lambda}}{\sqrt{2+\left(\frac{1+\lambda}{1-\lambda}\right)^2}}=\frac{1+\lambda}{\sqrt{3\lambda^2-2\lambda+3}}，令\ \frac{1+\lambda}{\sqrt{3\lambda^2-2\lambda+3}}=\frac{\sqrt{6}}{3}$$

解得$\lambda=\dfrac{1}{3}$，所以$\dfrac{PQ}{QD}=\dfrac{1}{2}$ --------12’

19、解：（1）当$n\in\mathbf{N}^*$，且$n\geqslant 2$时，$3a_n=2S_n+3$，$3a_{n-1}=2S_{n-1}+3$

所以$3a_n-3a_{n-1}=2(S_n-S_{n-1})=2a_n$，$a_n=3a_{n-1}$ ------2’

又$3a_1=2S_1+3=2a_1+3$，$a_1=3$

所以数列$\{a_n\}$是以3为首项、3为公比的等比数列，$a_n=3\times3^{n-1}=3^n$ --------4’

（2）$b_n=1+2\log_3 3^n=2n+1$，所以数列$\{b_n\}$是以3为首项、2为公差的等差数列，

$T_n=\dfrac{n(3+2n+1)}{2}=n(n+2)$，$\dfrac{1}{T_n}=\dfrac{1}{n(n+2)}=\dfrac{1}{2}(\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+2})$ --------6’

$$\frac{1}{T_1}+\frac{1}{T_2}+\cdots\frac{1}{T_n}=\frac{1}{2}(1-\frac{1}{3})+\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-\frac{1}{4})+\cdots+\frac{1}{2}(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2})$$

$$=\frac{1}{2}(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2})=\frac{3}{4}-\frac{1}{2(n+1)}-\frac{1}{2(n+2)}$$ --------8'

（3）$\left|\frac{1}{T_1}+\frac{1}{T_2}+\cdots+\frac{1}{T_n}-\frac{3}{4}\right|=\frac{1}{2(n+1)}+\frac{1}{2(n+2)}$

若 $\frac{1}{2(n+1)}+\frac{1}{2(n+2)}<\frac{1}{1000}$，则 $\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}<\frac{1}{1000}+\frac{1}{1000}$

当 $n=999$ 时，$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}=\frac{1}{1000}+\frac{1}{1001}<\frac{1}{1000}+\frac{1}{1000}$

当 $n=998$ 时，$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}=\frac{1}{999}+\frac{1}{1000}>\frac{1}{1000}+\frac{1}{1000}$ --------10'

又 $\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}$ 随着 n 的增大而减小，

故当 $n\in\mathbf{N}^*$，且 $1\leqslant n\leqslant 998$ 时，$\left|\frac{1}{T_1}+\frac{1}{T_2}+\cdots+\frac{1}{T_n}-\frac{3}{4}\right|>\frac{1}{1000}$；

当 $n\in\mathbf{N}^*$，且 $n\geqslant 999$ 时，$\left|\frac{1}{T_1}+\frac{1}{T_2}+\cdots+\frac{1}{T_n}-\frac{3}{4}\right|<\frac{1}{1000}$ --------12'

20、解：（1）由题意，$a=\sqrt{3}b$，$b=1$，所以椭圆的方程为 $\frac{x^2}{3}+y^2=1$ --------4'

（2）当直线 l 的倾斜角不等于 $90°$ 时，设 $l:y=k\left(x-1\right)$

代入 $\frac{x^2}{3}+y^2=1$，得 $x^2+3k^2(x-1)^2=3$，即 $(1+3k^2)x^2-6k^2x+3k^2-3=0$

设 $P\left(x_1,y_1\right)$，$Q\left(x_2,y_2\right)$，则 $x_1+x_2=\frac{6k^2}{1+3k^2}$，$x_1x_2=\frac{3k^2-3}{1+3k^2}$ --------6'

$$k_1+k_2=\frac{y_1-2}{x_1-3}+\frac{y_2-2}{x_2-3}=\frac{k\left(x_1-1\right)-2}{x_1-3}+\frac{k\left(x_2-1\right)-2}{x_2-3}$$

$$=\frac{k\left(x_1-1\right)\left(x_2-3\right)-2\left(x_2-3\right)+k\left(x_2-1\right)\left(x_1-3\right)-2\left(x_1-3\right)}{\left(x_1-3\right)\left(x_2-3\right)}$$

$$=\frac{2kx_1x_2-\left(4k+2\right)\left(x_1+x_2\right)+6k+12}{x_1x_2-3\left(x_1+x_2\right)+9}$$

$$=\frac{\frac{2k(3k^2-3)}{1+3k^2}-\frac{6k^2(4k+2)}{1+3k^2}+6k+12}{\frac{3k^2-3}{1+3k^2}-\frac{3\times 6k^2}{1+3k^2}+9}$$

$$=\frac{2k(3k^2-3)-6k^2(4k+2)+(6k+12)\left(1+3k^2\right)}{3k^2-3-18k^2+9(1+3k^2)}=\frac{24k^2+12}{12k^2+6}=2$$ --------10'

当直线 l 的倾斜角等于 $90°$ 时，点 $P(1,\ \frac{\sqrt{6}}{3})$，$Q(1,\ -\frac{\sqrt{6}}{3})$，经验证 $k_1+k_2=2$ 也成立.

综上所述，对于任意过 M 的直线 l，$k_1+k_2=2$ 都成立. --------12'

21、解：（1）把 $x=\rho\cos\theta$，$y=\rho\sin\theta$ 代入曲线 C_1 的参数方程，消去参数，得

$\left(\rho\cos\theta-\sqrt{3}\right)^2+\left(\rho\sin\theta-1\right)^2=4$，化简得曲线 C_1 的极坐标方程为

$\rho=2\sqrt{3}\cos\theta+2\sin\theta$ --------4'

（2）把 $\theta=\frac{\pi}{6}$ 代入曲线 C_1 的极坐标方程，得 $\rho=4$，即 $A(4,\ \frac{\pi}{6})$ --------7'

把 $\theta=\frac{\pi}{6}$ 代入曲线 C_2 的极坐标方程，得 $\rho=\sqrt{3}$，即 $B(\sqrt{3},\ \frac{\pi}{6})$ --------10'

所以 $|AB|=4-\sqrt{3}$ -------12'

22、解：（1）$g(x)<5$，即 $|x-1|+2<5$，$-3<x-1<3$，$-2<x<4$

所以不等式的解集是 $\{x|-2<x<4\}$ --------4'

（2）由题意，函数 $f(x)$ 的值域包含于函数 $g(x)$ 的值域 --------6'

$f(x)=|2x-a|+|2x+3|\geqslant|(2x-a)-(2x+3)|=|a+3|$，

所以函数 $f(x)$ 的值域为 $\left[|a+3|,\ +\infty\right)$ --------8'

$g(x)=|x-1|+2\geqslant 2$，函数 $g(x)$ 的值域为 $[2,\ +\infty)$ -----9'

$\left[|a+3|,\ +\infty\right)\subseteq[2,\ +\infty)$，$|a+3|\geqslant 2$，解得 $a\leqslant -5$ 或 $a\geqslant -1$

即 a 的取值范围为 $(-\infty,\ -5]\cup[-1,\ +\infty)$ -----10'