西南大学附中2018—2019学年度上期期末考试

高二数学试题（理科）

（总分：150分　　考试时间：120分钟）

注意事项：

1. 答题前，务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡规定的位置上.
2. 答选择题时，必须使用2B铅笔将答题卡上对应题目的答案标号涂黑．如需改动，用橡皮擦擦干净后，再选涂其他答案标号.
3. 答非选择题时，必须使用0.5毫米黑色签字笔，将答案书写在答题卡规定的位置上.
4. 所有题目必须在答题卡上作答，在试题卷上答题无效.

一、选择题：本大题共12小题，每题5分，共60分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1．若p是真命题，q是假命题，则（ D ）

A．$p\wedge q$是真命题　　B．$p\vee q$是假命题

C．$\neg p$是真命题　　D．$\neg q$是真命题

2．已知抛物线方程为$y=\frac{1}{2}x^2$，则该抛物线的准线方程为（ D ）

$x^2=2y$

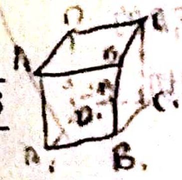
A．$y=\frac{1}{8}$　　B．$y=-\frac{1}{8}$　　C．$y=\frac{1}{2}$　　D．$y=-\frac{1}{2}$

3．* 已知a，b是两条不同的直线，γ是一个平面，$a\perp\gamma$．则$b//\gamma$是$a\perp b$的（ B ）

A．充要条件　　B．充分不必要条件

C．必要不充分条件　　D．既不充分也不必要条件

4．在正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，M为棱C_1D_1的中点，则直线AM与直线BD_1所成角的余弦值为（ B ）



A．$\frac{\sqrt{2}}{4}$　　B．$\frac{\sqrt{3}}{3}$　　C．$\frac{\sqrt{6}}{3}$　　D．$\frac{\sqrt{6}}{6}$

5．已知点$A(-1,0)$和点$B(1,0)$，动点P满足$k_{PA}\cdot k_{PB}=-\frac{1}{2}$，则动点$P$的轨迹方程为（ B ）

A．$x^2+2y^2=1$　　B．$x^2+2y^2=1\,(x\neq\pm1)$

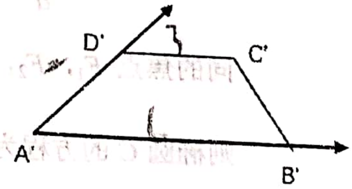
C．$x^2+\frac{y^2}{2}=1$　　D．$x^2+\frac{y^2}{2}=1\,(x\neq\pm1)$

（…题满分 12 分）

6．已知点 $A(1,1)$，点 F 是椭圆 C：$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$ 的左焦点，P 是椭圆上任意一点，则 $|PF|+|PA|$ 的最大值为（　）

A．$10+\sqrt{10}$　　B．10　　C．$2\sqrt{10}$　　D．$10-\sqrt{10}$

7．* 如图所示梯形 $A'B'C'D'$ 是水平放置的四边形 $ABCD$ 的直观图．已知 $A'D'=2$，$C'D'=3$，$A'B'=6$，$A'B'//D'C'$，则四边形 $ABCD$ 绕 AD 边所在的直线旋转一周所形成的几何体的侧面积为（　）



A．36π　　B．90π

C．45π　　D．$9\sqrt{11}\pi$

8．* 已知三棱锥 $S-ABC$ 中，$\angle SAB=\angle SAC$，$\angle SBA=\angle SBC$，S 点在底面 ABC 的射影为 O，则 O 为 $\triangle ABC$ 的（　）

A．重心　　B．垂心　　C．内心　　D．外心

9．* 设抛物线 C：$y^2=4x$ 的焦点为 F，直线 l 过 F 且与抛物线 C 交于 A，B 两点．抛物线 C 的准线与 x 轴交于 K，$\frac{S_{\triangle AKF}}{S_{\triangle BKF}}=3$，则直线 l 的方程是（　）

A．$y=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}(x-1)$　　B．$y=\pm\sqrt{3}(x-1)$

C．$y=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}(x-1)$　　D．$y=\pm\sqrt{2}(x-1)$

10．已知双曲线 C：$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,\ b>0)$ 的左焦点为 F，若过点 F 且倾斜角为 30° 的直线与双曲线的左支有且只有一个交点，则双曲线 C 的离心率的取值范围是（　）

A．$(\frac{\sqrt{3}}{3},+\infty)$　　B．$(\frac{2\sqrt{3}}{3},+\infty)$　　C．$[\frac{2\sqrt{3}}{3},+\infty)$　　D．$[\frac{\sqrt{3}}{3},+\infty)$

11．* 已知在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，动点 P 满足以下两个条件：①点 P 在正方体的表面及内部运动，总能使 $D_1P\perp AC$；②$\angle PA_1A=\angle CA_1A$．则动点 P 的轨迹是（　）的一部分

A．圆　　B．椭圆　　C．双曲线　　D．抛物线

12．* 已知 AB 为圆 M 的直径，且 $AB=2\sqrt{2}$，C 为圆 M 上的一点，且满足 $BC=2$．S 是圆 M 所在平面外一点，二面角 $S-AC-B$ 的大小为 120°，$SA=SC=\sqrt{5}$，则三棱锥 $S-ABC$ 外接球的表面积为（　）

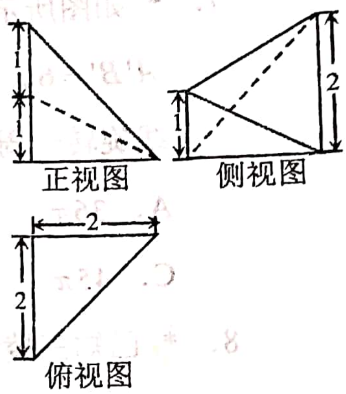
A．12π　　B．$\frac{49\sqrt{3}}{3}\pi$　　C．$\frac{49}{3}\pi$　　D．$12\sqrt{3}\pi$

二、填空题：本大题共 4 小题，每题 5 分，共 20 分.

13. * 已知三棱锥 $A-BCD$ 的各条棱长均为 2，从点 B 出发经过 AC 棱到达点 D 的最小距离为________.

14. 已知圆 C 的圆心在直线 $y=3x+2$ 上，过圆 C 上一点 $A(2,0)$ 作圆 C 的切线，切线方程为 $y=x-2$ 则圆 C 的方程为________.

15. 已知椭圆 C：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\,(a>0,\ b>0)$ 和双曲线 E：$x^2-y^2=1$ 有相同的焦点 F_1，F_2，P 为两曲线的一个交点，且 $\triangle PF_1F_2$ 的面积为 1，则椭圆 C 的方程为________.

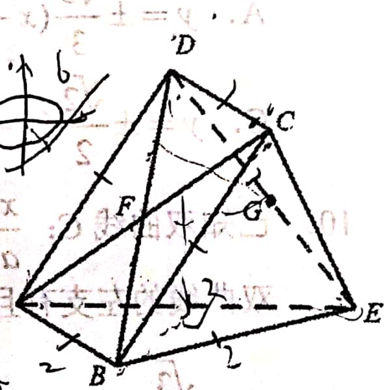


16. * 已知某几何体的三视图如图所示，则该几何体的体积为________.

三、解答题：本题共 6 小题，共 70 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. *(10 分) 已知椭圆 C 的方程为 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{3}=1\,(a>0)$，斜率为 $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ 的直线 l 与其交于 A，B 两点，线段 AB 的中点 $P(1,\dfrac{\sqrt{3}}{2})$．求椭圆 C 上的点到直线 $x-2y+6=0$ 的最小距离.

18. * (12 分) 如图在多面体 $ABCDE$ 中，AC 和 BD 交于一点 F，$AD=AE=DE=AB=BE=BC=CD=2$，G 为 DE 的中点.



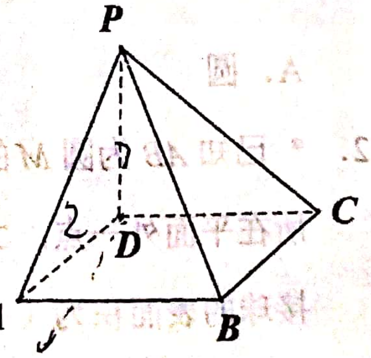
(1) 证明：$BD\perp AE$；

(2) 在 DB 上是否存在一点 H，使得 $GH//$面AEC？若存在，求出 $\dfrac{DH}{HB}$ 的值；若不存在，说明理由.

19. (12 分) 已知四棱锥 $P—ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 是菱形，$\angle DAB=60°$，$PD\perp$平面$ABCD$，$PD=AD=2$.

(1) 求 PD 与平面 PAB 所成角的正弦值；

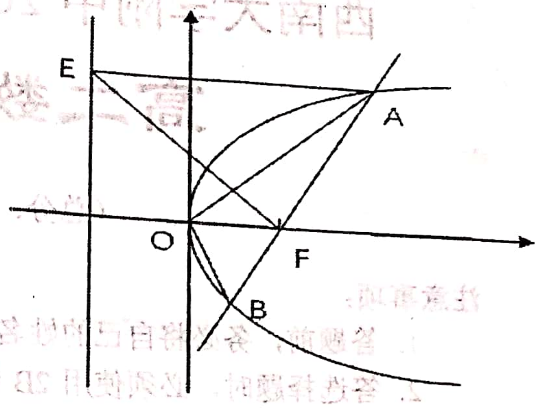
(2) 求二面角 $A-PB-C$ 的余弦值.



20. *(12 分) 已知抛物线 $y^2=2px\,(p>0)$ 的焦点为 F，准线为 l，过点 F 的直线交抛物线于 A，B 两点，过点 A 作准线 l 的垂线，垂足为 E.

(1) 若焦点到准线的距离为4，求抛物线的方程；

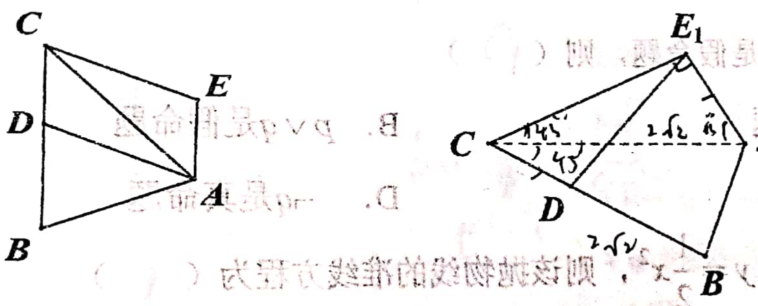
(2) 点 O 为坐标原点，若 $S_{\triangle OAB}=\dfrac{4}{3}\sqrt{3}$，当 $\triangle AEF$ 为等边三角形时，求点 A 的坐标.



21. (12 分) 已知 $\angle BCA=45°$，$CA=CB=2\sqrt{2}$，点 D 在 BC 边上. 以 AC 为对角线作 $\square ADCE$，沿 AC 将 $\triangle ACE$ 折到 $\triangle ACE_1$ 的位置，使平面$ACE_1\perp$平面ABC.

(1) 当 $\square ADCE$ 为正方形时，求 DE_1 与平面 CE_1A 所成的角；

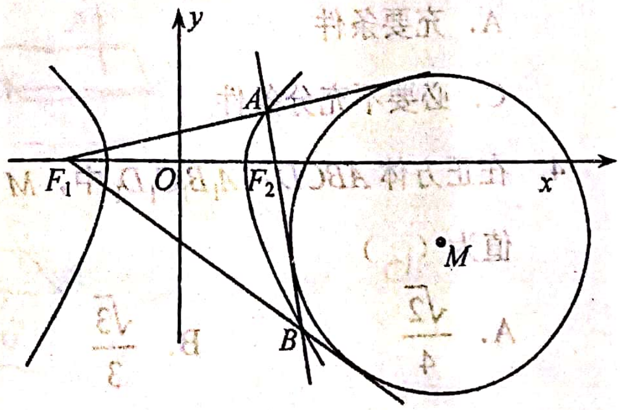
(2) 当 DE_1 取得最小值时，作 $E_1O\perp AC$ 于 O，取 E_1O 中点 H，过 CH 且与 AB 平行的平面 α 分别交 BE_1，AE_1 于 M，N，求此平面 α 分三棱锥 E_1-ABC 的体积的比.



22. *(12 分) 已知双曲线 C：$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1\,(a>0,\ b>0)$ 的离心率 $e=\dfrac{3\sqrt{2}}{4}$，左右焦点分别为 F_1，F_2，F_2 到一条渐近线的距离为 1.

(1) 若 P 在双曲线 C 上，证明：点 P 到两条渐近线的距离的乘积为定值；

(2) 过双曲线右焦点 F_2 的直线 l 与双曲线 C 交于 A，B 两点，如图圆 M 满足与 ΔAF_1B 的 AB 边，F_1A 延长线，F_1B 延长线均相切，求圆 M 面积 S 的最小值.



（命题人：郑莹莹　　　审题人：梁雅峰）

西南大学附中 2018—2019 学年度上期期末考试

高二数学试题参考答案（理科）

一、选择题：本大题共 12 小题，每题 5 分，共 60 分.

1—5 DDBBB　　6—10 ACCBC　　11—12 CC

二、填空题：本大题共 4 小题，每题 5 分，共 20 分.

13．$2\sqrt{3}$　　14．$x^2+(y-2)^2=8$　　15．$\frac{x^2}{3}+y^2=1$　　16．$\frac{4}{3}$

三、解答题：本题共 6 小题，共 70 分.

17．解：由点差法得 $\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{-\sqrt{3}}{2}=\frac{-3}{a^2}$

$\therefore a^2=4$，即椭圆方程为 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$

设直线方程为：$x-2y+m=0$

$$\begin{cases} x-2y+m=0 \\ \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1 \end{cases} \Rightarrow 16y^2-12my+3m^2-12=0$$

由 $\Delta=144m^2-64(3m^2-12)=0$

得：$m^2=16$，$\therefore m=\pm4$，当 $m=4$ 时，$d_{\min}=\frac{|6-4|}{\sqrt{5}}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$

18．证明：(1) 由题知，底面 $ABCD$ 是菱形

$\therefore BD\perp AC$

$\because ED=EB$，F 为 BD 中点

$\therefore BD\perp EF$

$\therefore BD\perp$ 面 AEF

$\therefore BD\perp AE$

(2) 当 H 为 BD 四等分点 $\frac{DH}{HB}=\frac{1}{3}$ 时满足

$\because H$ 为 BD 的四等分点，$\frac{DH}{HB}=\frac{1}{3}$

$\therefore H$ 为 DF 中点，又 G 为 DE 中点

$\therefore HG \underset{=}{\parallel} \frac{1}{2}EF$，$\therefore HG\parallel$ 面 AEC

19．解：(1) 取 AB 中点 E，连接 DE、PE

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是菱形，$\angle CDA=120^\circ$

$\therefore DE\perp AB$，又 $PD\perp AB$

$\therefore AB\perp$ 面 PDE

$\therefore$ 面 $PDE\perp$ 面 PAB，即 $\angle DPE$ 为所求角

易知 $DE=\sqrt{3}$，$PD=2$，$\tan\angle DPE=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，

则 $\sin\angle DPE=\dfrac{\sqrt{21}}{7}$

(2) 作 $AF\perp PB$ 于 F，则由 $\triangle APB\cong\triangle CPB$

$\therefore CF\perp PB$

则 $\angle CFA$ 为所求二面角的平面角

在 $\triangle PAB$ 中 $\cos\angle B=\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$，$\therefore \sin\angle B=\dfrac{\sqrt{7}}{2\sqrt{2}}$

$AF=CF=\dfrac{\sqrt{14}}{2}$，$AC=2\sqrt{3}$

在 $\triangle CFA$ 中，由余弦定理得 $\cos\angle CFA=\dfrac{-5}{7}$

20．解：(1) $p=4$，$\therefore$ 抛物线方程为 $y^2=8x$

(2) $\because \triangle AEF$ 为等边三角形

$\therefore$ 不妨设直线 AB 为 $y=\sqrt{3}(x-\dfrac{p}{2})$，$\begin{cases} y=\sqrt{3}(x-\dfrac{p}{2}) \\ y^2=2px \end{cases} \Rightarrow y^2-\dfrac{2\sqrt{3}}{3}py-p^2=0$

$\therefore |y_1-y_2|=\sqrt{(y_1+y_2)^2-4y_1y_2}=\sqrt{\dfrac{4}{3}p^2+4p^2}=\dfrac{4\sqrt{3}}{3}p$

又 $S_{\triangle OAB}=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{p}{2}\cdot|y_1-y_2|=\dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{4\sqrt{3}}{3}\cdot p^2=\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$

$\therefore p=2$

抛物线方程为 $y^2=4x$

此时 $AE=AF$，则 $\triangle AEF$ 为等边三角形，只需 F 在 AE 中垂线上

$\therefore x_A=\dfrac{3p}{2}=3$

$\therefore A(3,\pm2\sqrt{3})$

21．解：(1) 取 AC 中点 O，连接 E_1O，DO，易知 $\angle DE_1O=45°$，∴所求线面角为 $45°$

(2) 过 E_1 作 $E_1O\perp AC$ 于 O，连接 DO，设 $CD=x$

则 $E_1O=AO=\frac{\sqrt{2}}{2}x$，$CO=AC-AO=2\sqrt{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}x$

在△CDO 中

$DO^2=CD^2+CO^2-2CD\cdot CO\cdot\cos45°$

$=x^2+(2\sqrt{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}x)^2-2x(2\sqrt{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}x)\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}$

$=\frac{5}{2}x^2-8x+8$

在 $Rt\triangle E_1OD$ 中 $E_1D^2=E_1O^2+DO^2=3x^2-8x+8\ (0<x\le2\sqrt{2})$

∴当 $x=\frac{4}{3}$ 时，$(E_1D)_{\min}=\sqrt{\frac{8}{3}}=\frac{2\sqrt{6}}{3}$

过 O 作 $QO//E_1A$ 交 CH 于 Q，则 $OQ=E_1N$

$\therefore\frac{E_1N}{AN}=\frac{OQ}{AN}=\frac{CO}{AC}$

由(1) $E_1A=\frac{4}{3}$，∴ $OA=\frac{2\sqrt{2}}{3}$，$CO=\frac{4\sqrt{2}}{3}$

$\therefore\frac{CO}{CA}=\frac{2}{3}$

$\therefore\frac{E_1N}{AN}=\frac{2}{3}$，则 $\frac{E_1N}{E_1A}=\frac{2}{5}$

$\therefore\frac{V_{C-E_1MN}}{V_{C-E_1AB}}=\frac{4}{25}$

∴两部分体积比为 4∶21

22．解：(1) 设 $P(x_0,y_0)$，两渐近线为 $y=\pm\frac{x}{2\sqrt{2}}$，

则 $d_1d_2=\frac{|x_0+2\sqrt{2}y_0|}{3}\cdot\frac{|x_0-2\sqrt{2}y_0|}{3}=\frac{|x_0^2-8y_0^2|}{9}=\frac{8}{9}$

(2) $S_{\triangle AF_1B}=S_{\triangle MAF_1}+S_{\triangle MBF_1}-S_{\triangle MBA}=\frac{1}{2}\cdot r\cdot(|AF_1|+|BF_1|-|AB|)$

$=\frac{1}{2}\cdot r\cdot4a=2ar=4\sqrt{2}r$

设直线 AB 为 $x=my+3$，$\begin{cases} x=my+3 \\ \dfrac{x^2}{8}-y^2=1 \end{cases} \Rightarrow (m^2-8)y^2+6my+1=0$

$$\therefore \begin{cases} y_1+y_2=\dfrac{6m}{8-m^2} \\ y_1y_2=\dfrac{1}{m^2-8}<0 \\ \Delta=36m^2-4(m^2-8)>0 \end{cases} \Rightarrow 0\le m^2<8$$

$$S_{\triangle AF_1B}=\frac{1}{2}\cdot 2c\cdot|y_1-y_2|=3\times\sqrt{(y_1+y_2)^2-4y_1y_2}$$

$$=3\times\sqrt{\frac{32(m^2+1)}{(8-m^2)^2}}=\frac{3\sqrt{32(m^2+1)}}{8-m^2}=4\sqrt{2}r$$

$$\therefore r=\frac{3\sqrt{m^2+1}}{8-m^2}=\frac{3}{\dfrac{9}{\sqrt{m^2+1}}-\sqrt{m^2+1}}\ge\frac{3}{8}$$

$$\therefore S=\pi r^2\ge\frac{9\pi}{64}$$