2018～2019 学年度第一学期宣城市八校高二年级期末联考

数 学 试 卷(文科)

命题人、审题人:高莹、章贵平、王芳(宁国中学)

考生注意:

1. 本试卷分第Ⅰ卷(选择题)和第Ⅱ卷(非选择题)两部分。满分 150 分,考试时间 120 分钟。
2. 考生作答时,请将答案答在答题卡上。第Ⅰ卷每小题选出答案后,用 2B 铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑;第Ⅱ卷请用直径 0.5 毫米黑色墨水签字笔在答题卡上各题的答题区域内作答,**超出答题区域书写的答案无效,在试题卷、草稿纸上作答无效**。
3. 本卷命题范围:必修 3+选修 1-1。

第Ⅰ卷(选择题 共 60 分)

一、选择题:本大题共 12 小题,每小题 5 分,共 60 分. 在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的.

1. 某校采用系统抽样,从该校高二年级全体 1000 名学生中抽取一个样本做视力检查. 现将这 1000 名学生从 1 到 1000 进行编号. 已知样本中编号最小的两个数分别是 14、64,则样本中最大的编号应该为

A. 966　　B. 965

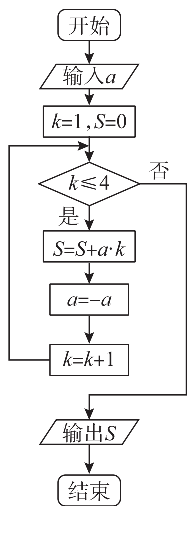
C. 964　　D. 963

2. 把红、蓝、黄、绿 4 面彩旗随机地分给甲、乙、丙、丁 4 个人,每人分得一面. 事件“甲分得黄旗”与“乙分得黄旗”是

A. 对立事件　　B. 互斥但不对立事件

C. 不可能事件　　D. 以上均不对

3. 执行如图所示的程序框图. 如果输入 $a=1$,则输出 $S=$



A. 3　　B. −3

C. 2　　D. −2

4. 现有一个 k 进制的数 $27_{(k)}$,k 为其所有可能取值中最小的正整数,则 $27_{(k)}$ 化为十进制数为

A. 24　　B. 23

C. 22　　D. 21

5. 设集合 $A=\{3,a^2\}$，$B=\{2,4\}$，则“$a=2$”是“$A\cap B=\{4\}$”的

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

C. 充要条件　　D. 既不充分也不必要条件

6. 在 5 场篮球比赛中某篮球运动员 A 的得分所构成的样本为 21，15，17，8，13. 若篮球运动员 B 的得分所构成的样本数据恰好是 A 样本数据每个都减 3 后所得的数据，则 A，B 两名运动员得分所构成的两样本的下列数字特征对应相同的是

A. 平均数　　B. 众数　　C. 中位数　　D. 标准差

7. 已知双曲线的一个焦点与抛物线 $x^2=24y$ 的焦点重合，其一条渐近线的倾斜角为 60°，则该双曲线的标准方程为

A. $\frac{y^2}{12}-\frac{x^2}{4}=1$　　B. $\frac{x^2}{12}-\frac{y^2}{4}=1$

C. $\frac{y^2}{27}-\frac{x^2}{9}=1$　　D. $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{27}=1$

8. 下列命题中是真命题的是

A. $\exists x_0\in\mathbf{R}, 2^{x_0}\leqslant 0$　　B. $\forall x\in\mathbf{R}, \lg(x^2+1)\geqslant 0$

C. “若 $x^2>x$，则 $x>0$”的逆命题　　D. “若 $x<y$，则 $x^2<y^2$”的逆否命题

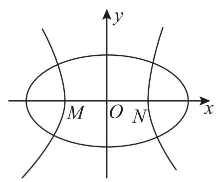
9. 等边三角形 OAB 的三个顶点都在抛物线 $y^2=2px(p>0)$ 上，O 为坐标原点，则这个三角形的边长为

A. $\sqrt{3}p$　　B. $2\sqrt{3}p$　　C. $4\sqrt{3}p$　　D. $2p$

10. 已知直线 $y=kx+1$ 与曲线 $y=x^3+ax+b$ 相切于点 $A(1,3)$，则 b 的值为

A. 3　　B. -3　　C. 5　　D. -5

11. 如图，中心均为原点 O 的双曲线与椭圆有公共焦点，M、N 是双曲线的两个顶点，若 M、O、N 将椭圆的长轴四等分，则双曲线与椭圆的离心率的比值是



A. 3　　B. 2

C. $\sqrt{3}$　　D. $\sqrt{2}$

12. 已知函数 $f(x)=x\ln x-ae^x$（e 为自然对数的底数）有两个极值点，则实数 a 的取值范围是

A. $(0,\frac{1}{e})$　　B. $(0,e)$

C. $(-\infty,\frac{1}{e})$　　D. $(\frac{1}{e},e)$

第Ⅱ卷(非选择题　共 90 分)

二、填空题:本大题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分.

13. 命题 p:$\exists x_0 \in \mathbf{R}, x_0^2+2x_0+2<0$,则 $\neg p$ 为________.

14. 某人发现表停了,他打开收音机,想听电台整点报时,则他等待的时间不多于 15 分钟的概率为________.

15. 已知等轴双曲线 C 的中心在原点,焦点在 x 轴上,C 与抛物线 $y^2=16x$ 的准线相交于 A、B 两点,$|AB|=4\sqrt{3}$,则双曲线 C 的实轴长等于________.

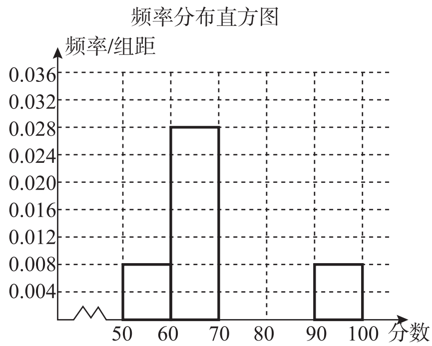
16. 若函数 $f(x)=2x^2-\ln x$ 在其定义域内的一个子区间 $(k-1,k+1)$ 上不是单调函数,则实数 k 的取值范围是________.

三、解答题:本大题共 6 小题,共 70 分. 解答应写出必要的文字说明、证明过程及演算步骤.

17.(本小题满分 10 分)

现将某校高二年级某班的学业水平测试数学成绩分为 $[50,60)$、$[60,70)$、$[70,80)$、$[80,90)$、$[90,100)$ 五组,绘制而成的茎叶图、频率分布直方图如下,由于工作疏忽,茎叶图有部分被损坏,频率分布直方图也不完整. 请据此解答如下问题:(注:该班同学数学成绩均在区间 $[50,100)$ 内)

5	2 4 6 7
6	1 2 2 3 5 5 5 6 6 6 7 8 9 9
7	[redacted]
8	1 1 2 3 3 3 4 4 5 7 7 9
9	3 5 7 8



(1)将频率分布直方图补充完整;

(2)该班希望组建两个数学学习互助小组. 班上数学成绩最好的两位同学分别担任两组组长,将此次成绩低于 60 分的同学作为组员平均分到两组,即每组有一名组长和两名成绩低于 60 分的组员. 求此次考试成绩为 52 分、54 分和 98 分的三名同学分到同一组的概率.

18.(本小题满分 12 分)

p:关于 x 的方程 $x^2+(a-2)x+4=0$ 无解,q:$2-m<a<2+m(m>0)$.

(1)若 $m=5$ 时,“$p\vee q$”为真命题,“$p\wedge q$”为假命题,求实数 a 的取值范围;

(2)当命题“若 p,则 q”为真命题,“若 q,则 p”为假命题时,求实数 m 的取值范围.

19.(本小题满分 12 分)

企业需为员工缴纳社会保险,缴费标准是根据职工本人上一年度月平均工资(单位:元)的 8% 缴纳.某企业员工甲在 2014 年至 2018 年各年中每月所缴纳的养老保险数额 y(单位:元)与年份序号 t 的统计如下表:

年份	2014	2015	2016	2017	2018
t	1	2	3	4	5
y	270	330	390	460	500

(1)求出 y 关于 t 的线性回归方程 $\hat{y}=\hat{b}t+\hat{a}$;

(2)试预测 2019 年该员工的月平均工资为多少元?

附:回归直线的斜率和截距的最小二乘法估计公式分别为:

$$\hat{b}=\frac{\sum_{i=1}^{n}(t_i-\bar{t})(y_i-\bar{y})}{\sum_{i=1}^{n}(t_i-\bar{t})^2}=\frac{\sum_{i=1}^{n}t_iy_i-n\bar{t}\,\bar{y}}{\sum_{i=1}^{n}t_i^2-n\bar{t}^2},\hat{a}=\bar{y}-\hat{b}\,\bar{t},\text{其中}\sum_{i=1}^{5}t_iy_i=6440.$$

20.(本小题满分 12 分)

设抛物线 $C:y^2=2px(p>0)$ 的焦点为 F,过 F 且斜率为 k 的直线 l 交抛物线 C 于 $A(x_1,y_1)$、$B(x_2,y_2)$ 两点,且 $y_1y_2=-4$.

(1)求抛物线 C 的标准方程;

(2)已知点 $P(-1,k)$,且 $\triangle PAB$ 的面积为 $6\sqrt{3}$,求 k 的值.

21.(本小题满分 12 分)

已知函数 $f(x)=x^2-(a-2)x-a\ln x(a\in\mathbf{R})$.

(1)求函数 $y=f(x)$ 的单调区间;

(2)当 $a=3$ 时,证明:对任意 $x>0$,都有 $f(x)\geqslant 2(1-x)$ 成立.

22.(本小题满分 12 分)

已知椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左顶点为 A,右焦点为 $F_2(2,0)$,点 $B(2,-\sqrt{2})$ 在椭圆 C 上.

(1)求椭圆 C 的标准方程;

(2)若直线 $y=kx(k\neq 0)$ 与椭圆 C 交于 E、F 两点,直线 AE、AF 分别与 y 轴交于点 M、N.在 x 轴上是否存在点 P,使得无论非零实数 k 怎样变化,总有 $\angle MPN$ 为直角?若存在,求出点 P 的坐标;若不存在,请说明理由.

2018～2019 学年度第一学期宣城市八校高二年级期末联考·数学(文科)

参考答案、提示及评分细则

1.C　2.B　3.D　4.B　5.A　6.D　7.C　8.B　9.C　10.A　11.B　12.A

13. $\forall x\in\mathbf{R}, x^2+2x+2\geqslant 0$

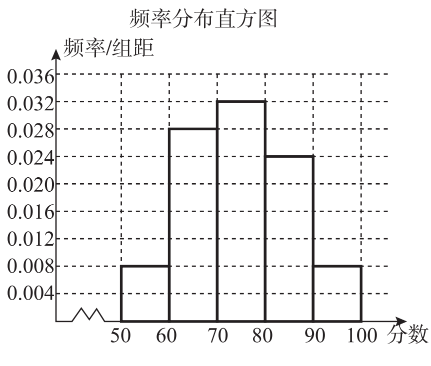
14. $\frac{1}{4}$

15. 4

16. $\left[1,\frac{3}{2}\right)$

17. 解:(1)由茎叶图知成绩在[50,60)中的人数为 4 人,由频率分布直方图知成绩在[50,60) 中的人数所占的频率为 $0.008\times10=0.08$,故总人数为 $4\div0.08=50$(人),所以成绩在[70,80)组的人数为 $50-4-14-12-4=16$(人),

所以频率分布直方图中成绩在[70,80)和[80,90)组高度分别为 $16\div50\div10=0.032$ 和 $12\div50\div10=0.024$. ………………………………………………………………………………………………… 5 分



(2)与成绩为 98 分的同学同组的两名同学有如下 6 种可能:

(52,54),(52,56),(52,57),(54,56),(54,57),(56,57),

所以此次考试成绩为 52 分、54 分和 98 分的三名同学恰好分到一组的概率为$\frac{1}{6}$. …………………… 10 分

18. 解:(1) p:关于 x 的方程 $x^2+(a-2)x+4=0$ 无解,

则 $\Delta=(a-2)^2-16<0$，则 $-2<a<6$.

q：$2-m<a<2+m(m>0)$，若 $m=5$ 时，则 $-3<a<7$. ………………………………………………………… 2 分

因为“$p\vee q$”为真命题，“$p\wedge q$”为假命题，所以 p、q 一真一假.

当 p 真 q 假时：

$\begin{cases}-2<a<6\\ a\leqslant -3 \text{ 或 } a\geqslant 7\end{cases}\Rightarrow a$ 无解； ………………………………………………………………… 4 分

当 p 假 q 真时：

$\begin{cases}a\leqslant -2 \text{ 或 } a\geqslant 6\\ -3<a<7\end{cases}\Rightarrow -3<a\leqslant -2$ 或 $6\leqslant a<7$. ……………………………………………………… 6 分

(2) 当命题“若 p，则 q”为真命题，“若 q，则 p”为假命题时，即 p 是 q 的充分不必要条件，则 $A=\{a\mid -2<a<6\}$ 是 $B=\{a\mid 2-m<a<2+m(m>0)\}$ 的真子集，……………………………………… 7 分

所以 $\begin{cases}-2\geqslant 2-m\\ 6\leqslant 2+m\end{cases}\Rightarrow m\geqslant 4$. ……………………………………………………………………… 10 分

去掉 $\begin{cases}-2=2-m\\ 6=2+m\end{cases}\Rightarrow m=4$ 即 $A=B$ 的情况，则 $m>4$. ………………………………………………… 12 分

19. 解：(1) $\bar{t}=3$，$\bar{y}=390$. ……………………………………………………………………………… 2 分

$$\hat{b}=\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}t_iy_i-n\bar{t}\,\bar{y}}{\sum\limits_{i=1}^{n}t_i^2-n\bar{t}^2}=\frac{6440-5\times 3\times 390}{1+4+9+16+25-5\times 9}=59.$$ ……………………………………………… 6 分

$\hat{a}=\bar{y}-\hat{b}\,\bar{t}=390-59\times 3=213$.

所以 $\hat{y}=59t+213$. ……………………………………………………………………………………… 8 分

(2) 因为社会保险缴费标准是根据职工本人上一年度月平均工资(单位：元)的 8% 缴纳，所以 2020 年所缴纳的社会保险是该职工本人 2019 年度月平均工资的 8%，故 $t=7$. ……………………………………… 10 分

$\hat{y}=59\times7+213=626$(元). …………………………………………………………………………… 11 分

2019 年度月平均工资$=626\div0.08=7825$(元) ……………………………………………………………… 12 分

20. 解:(1)因为 $F(\frac{p}{2},0)$,所以设直线 AB 的方程为 $y=k(x-\frac{p}{2})$,代入抛物线,消去 x 得:$ky^2-2py-kp^2=0$,

……………………………………………………………………………………………………… 2 分

$y_1y_2=-p^2=-4$,从而 $p=2$. ……………………………………………………………………… 4 分

所以抛物线 C 的方程为 $y^2=4x$. ……………………………………………………………………… 5 分

(2)由(1)知 $F(1,0)$,直线 AB 的方程为 $y=k(x-1)$代入抛物线方程,消去 x 得 $ky^2-4y-4k=0$.

$\therefore y_1+y_2=\frac{4}{k},y_1y_2=-4$. …………………………………………………………………… 6 分

$\therefore |AB|=\sqrt{1+\frac{1}{k^2}}\cdot\sqrt{\frac{16}{k^2}-4\times(-4)}=4(1+\frac{1}{k^2})$. …………………………………………… 8 分

又$\because P$ 到直线 AB 的距离 $d=\frac{3|k|}{\sqrt{k^2+1}}$. ………………………………………………………… 10 分

$\therefore\triangle PAB$ 的面积 $S=\frac{1}{2}\cdot|AB|\cdot d=6\sqrt{1+\frac{1}{k^2}}=6\sqrt{3}$.

$\therefore k=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$. …………………………………………………………………………………… 12 分

21. 解:(1)$f(x)$的定义域为$(0,+\infty)$. ……………………………………………………………… 1 分

$f'(x)=2x-(a-2)-\frac{a}{x}=\frac{2x^2-(a-2)x-a}{x}=\frac{(2x-a)(x+1)}{x}$. ……………………………………… 2 分

①当 $a\leqslant0$ 时,$f'(x)>0$ 在$(0,+\infty)$上恒成立,故 $f(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增. ……………………… 4 分

②当 $a>0$ 时,由 $f'(x)>0$ 得 $x>\frac{a}{2}$;由 $f'(x)<0$ 得 $0<x<\frac{a}{2}$.

$\therefore f(x)$的单调增区间为$(\frac{a}{2},+\infty)$,单调减区间为$(0,\frac{a}{2})$. ………………………………………… 6 分

(2)当 $a=3$ 时,令 $g(x)=f(x)-2(1-x)=x^2+x-3\ln x-2$. ……………………………………………… 7 分

则 $g'(x)=2x+1-\frac{3}{x}=\frac{2x^2+x-3}{x}=\frac{(2x+3)(x-1)}{x}$. ……………………………………………… 8 分

$\because x>0$，

$\therefore$ 当 $x\in(0,1)$ 时，$g'(x)<0$，$g(x)$ 单调递减；

当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$g'(x)>0$，$g(x)$ 单调递增，所以 $g_{\min}(x)=g(1)=0$.

$\therefore g(x)\geqslant 0$　即 $f(x)\geqslant 2(1-x)$. ………………………………………………………… 12 分

22. 解：(1) 依题意得 $c=2$，$\because$ 点 $B(2,-\sqrt{2})$ 在椭圆 C 上，$\therefore \dfrac{4}{a^2}+\dfrac{2}{b^2}=1$. ………………………………………… 2 分

又 $\because a^2=b^2+c^2$，$\therefore a^2=8$，$b^2=4$. $\therefore$ 椭圆的标准方程为 $\dfrac{x^2}{8}+\dfrac{y^2}{4}=1$. ………………………………………… 4 分

(2) 假设存在这样的点 P，并设 $P(x_0,0)$，设 $E(x_1,y_1)$，不妨设 $x_1>0$，则 $F(-x_1,-y_1)$ 联立 $\begin{cases} y=kx \\ \dfrac{x^2}{8}+\dfrac{y^2}{4}=1 \end{cases}$，

消去 y 得 $(1+2k^2)x^2-8=0$，

解得 $x_1=\dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt{1+2k^2}}$，$y_1=\dfrac{2\sqrt{2}k}{\sqrt{1+2k^2}}$. ………………………………………………………………………… 6 分

$\because A(-2\sqrt{2},0)$，$\therefore$ 直线 AE 的方程为 $y=\dfrac{k}{1+\sqrt{1+2k^2}}\cdot(x+2\sqrt{2})$，

$\therefore M\left(0,\dfrac{2\sqrt{2}k}{1+\sqrt{1+2k^2}}\right)$，同理 $N\left(0,\dfrac{2\sqrt{2}k}{1-\sqrt{1+2k^2}}\right)$. ………………………………………………………… 8 分

$\therefore \overrightarrow{PM}=\left(-x_0,\dfrac{2\sqrt{2}k}{1+\sqrt{1+2k^2}}\right)$，$\overrightarrow{PN}=\left(-x_0,\dfrac{2\sqrt{2}k}{1-\sqrt{1+2k^2}}\right)$. ………………………………………… 10 分

若 $\angle MPN$ 为直角，则 $\overrightarrow{PM}\cdot\overrightarrow{PN}=0$，$\therefore x_0^2-4=0$，所以 $x_0=2$ 或 $x_0=-2$，所以存在点 P，使得无论非零实数 k 怎样变化，总有 $\angle MPN$ 为直角，此时点 P 的坐标为 $(2,0)$ 或 $(-2,0)$. ………………………………… 12 分