

南木林高级中学 2018——2019 学年度第 一学期 期末测试

考试方式： 闭卷 年级 高二 学科： 数学 命题人： 曹晓燕

注意事项：

- 1、本试题全部为笔答题，共 页，满分 分，考试时间 分钟。
- 2、答卷前将密封线内的项目填写清楚，密封线内禁止答题。
- 3、用钢笔或签字笔直接答在试卷(或答题纸上)。
- 4、本试题为闭卷考试，请考生勿将课本进入考场。

一、选择题（共 12 小题，每小题 4 分，只有一个选项正确）：

1. 已知集合 $A = \{x | x^2 - 4x + 3 \leq 0\}$, $B = \{x \in N | -1 < x < 3\}$, 则 $A \cap B$ ()

- A. $\{0,1,2\}$ B. $\{1,2\}$ C. $\{1,2,3\}$ D. $\{2,3\}$

2. 在 $\triangle ABC$ 中, 若 $\angle A = 60^\circ$, $\angle B = 45^\circ$, $BC = 2\sqrt{3}$, 则 $AC =$ ()

- A. $4\sqrt{3}$ B. $2\sqrt{2}$ C. $\sqrt{3}$ D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

3. 不等式 $\frac{4x-3}{2-x} \geq 0$ 的解集是 ()

- A. $\{x | \frac{3}{4} \leq x \leq 2\}$ B. $\{x | \frac{3}{4} \leq x < 2\}$ C. $\{x | x > 2 \text{ 或 } x \leq \frac{3}{4}\}$ D. $\{x | x \geq \frac{3}{4}\}$

4. 已知三个数 $2, x, 8$ 成等比数列, 则 x 的值为 ()

- A. 4 B. -4 C. ± 4 D. 16

5. 设变量 x, y 满足约束条件 $\begin{cases} x - y + 2 \geq 0, \\ x - 5y + 10 \leq 0, \\ x + y - 8 \leq 0, \end{cases}$ 则目标函数 $z = 3x - 4y$ 的最大值和最小值

分别为 ()

- A. 3, -11 B. -3, -11 C. 11, -3 D. 11, 3

6. 有下列命题:

- ①面积相等的三角形是全等三角形;
- ②“若 $xy = 0$, 则 $|x| + |y| = 0$ ”的逆命题;
- ③“若 $a > b$, 则 $a + c > b + c$ ”的否命题;
- ④“矩形的对角线互相垂直”的逆否命题. 其中真命题为 ()

- A. ①② B. ②③ C. ①③ D. ②④

7 (理). 已知 $\overrightarrow{AB} = (2, 4, 5)$, $\overrightarrow{CD} = (3, x, y)$, 若 $\overrightarrow{AB} // \overrightarrow{CD}$, 则 ()

- A. $x = 6$, $y = 1$ B. $x = 3$, $y = \frac{15}{2}$
C. $x = 3$, $y = 15$ D. $x = 6$, $y = \frac{15}{2}$

7. (文) 已知函数 $f(x) = x + \ln x$, 则 $f'(1) =$ ()

- A. 1 B. -2 C. -1 D. 2

8. 若等差数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 1$, $a_{n+2} - a_n = 3$, 则 $a_2 =$ ()

- A. 5 B. $\frac{5}{2}$ C. $\frac{7}{2}$ D. $\frac{3}{2}$

9. 抛物线 $y = x^2$ 的焦点坐标是 ()

- A. (1,0) B. $(0, \frac{1}{8})$ C. $(\frac{1}{4}, 0)$ D. $(0, \frac{1}{4})$

10. 在 $\triangle ABC$ 中, 已知 $\sin^2 A + \sin^2 B - \sin A \sin B = \sin^2 C$, 且满足 $ab = 4$, 则 $\triangle ABC$ 的面积为 ()

- A. 1 B. 2 C. $\sqrt{2}$ D. $\sqrt{3}$

11. 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 , 离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$, 过 F_2 的

直线交椭圆 C 于 A, B 两点, 若 $\triangle AF_1B$ 的周长为 $4\sqrt{3}$, 则椭圆 C 的标准方程为 ()

- A. $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{2} = 1$ B. $\frac{x^2}{3} + y^2 = 1$ C. $\frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{8} = 1$ D. $\frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{4} = 1$

12. 若 $b \neq 0$, 则“ a, b, c 成等比数列”是“ $b = \sqrt{ac}$ ”的 ()

- A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
C. 充分必要条件 D. 既不充分也不必要条件

二、填空题（共 4 小题，每小题 4 分）

13. （理）已知 $\mathbf{a} = (1, 1, 0)$, $\mathbf{b} = (0, 1, 1)$, $\mathbf{m} = \mathbf{a} + \mathbf{b}$, $\mathbf{n} = \mathbf{a} + \lambda \mathbf{b}$, $\mathbf{m} \perp \mathbf{n}$, 则 $\lambda =$ _____.

13. （文）已知曲线 $y = \frac{x^2}{4} - 3 \ln x$ 的一条切线的斜率为 $\frac{1}{2}$, 则切点的横坐标为_____.

14. 已知 x, y 都是正数. 若 $3x + 2y = 12$, 求 xy 的最大值_____

15. 设 S_n 是等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 若 $a_1 + a_3 + a_5 = 3$, 则 $S_5 =$

16. 若双曲线 $\frac{y^2}{16} - \frac{x^2}{m} = 1$ 的离心率 $e = 2$, 则 $m =$ _____.

三、解答题（共 4 小题）

17. （8 分）锐角 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 的对边分别是 a, b, c , 已知 $\cos 2C = -\frac{1}{4}$.

(1) 求 $\sin C$ 的值; (2) 当 $a = 2$, $2 \sin A = \sin C$ 时, 求 b 的长

18. （8 分）已知等差数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 + a_2 = 10$, $a_4 - a_3 = 2$.

(1) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 设等比数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_2 = a_3$, $b_3 = a_7$, 问: b_6 与数列 $\{a_n\}$ 的第几项相等?

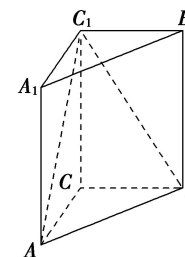
19. (10 分) 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{6}}{3}$, 短轴的一个端点到右焦点的

距离为 $\sqrt{3}$. 求椭圆 C 的方程.

20. （文）(10 分) 已知函数 $y = x^3 + x - 16$ (1) 求曲线 $y = f(x)$ 在点 $(2, -6)$ 处的切线的方程;

(2) 如果曲线 $y = f(x)$ 的某一切线 $y = -\frac{1}{4}x + 3$ 与直线垂直, 求切点坐标与切线的方程.

20. （理）(10 分) 如图, 在直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, $AC = 3$, $BC = 4$, $AB = 5$, $AA_1 = 4$.



(1) 证明: $AC \perp BC_1$;

(2) 求二面角 C_1-AB-C 的余弦值大小.

一、选择题（共 12 小题，每小题 4 分，只有一个选项正确）：

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
B	B	B	C	A	B	D 理 D 文	B	D	D	A	B

二、填空题（共 4 小题，每小题 4 分）

13: -1 理, 3 文 14: 6 15: 5 16: 48

三、解答题（共 4 小题）

17. 解：（1）因为 $\cos 2C = 1 - 2\sin^2 C = -\frac{1}{4}$, $0 < C < \frac{\pi}{2}$, 所以 $\sin C = \frac{\sqrt{10}}{4}$.

（2）当 $a = 2$, $2\sin A = \sin C$ 时, 由 $\frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C}$, 解得 $c = 4$.

由 $\cos 2C = 2\cos^2 C - 1 = -\frac{1}{4}$, 及 $0 < C < \frac{\pi}{2}$ 得 $\cos C = \frac{\sqrt{6}}{4}$,

由 $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$, 得 $b^2 - \sqrt{6}b - 12 = 0$,

解得 $b = 2\sqrt{6}$ (负值舍去)

18. 解：(1) 设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d .

因为 $a_4 - a_3 = 2$, 所以 $d = 2$.

又因为 $a_1 + a_2 = 10$, 所以 $2a_1 + d = 10$, 故 $a_1 = 4$.

所以 $a_n = 4 + 2(n-1) = 2n + 2$ ($n = 1, 2, \dots$).

(2) 设等比数列 $\{b_n\}$ 的公比为 q .

因为 $b_2 = a_3 = 8$, $b_3 = a_7 = 16$,

所以 $q = 2$, $b_1 = 4$.

所以 $b_6 = 4 \times 2^5 = 128$.

由 $128 = 2n + 2$ 得 $n = 63$,

所以 b_6 与数列 $\{a_n\}$ 的第 63 项相等.

19. 解：设椭圆的半焦距为 c , 依题意,

得 $a = \sqrt{3}$ 且 $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{6}}{3}$,

$\therefore a = \sqrt{3}$, $c = \sqrt{2}$,

从而 $b^2 = a^2 - c^2 = 1$,

因此所求椭圆的方程为 $\frac{x^2}{3} + y^2 = 1$.

20、(文) 解: (1) 因为 $f'(x) = 3x^2 + 1$,
 所以 $f(x)$ 在点 $(2, -6)$ 处的切线的斜率 $k = f'(2) = 13$.
 所以切线的方程为 $y = 13(x - 2) + (-6)$,
 即 $y = 13x - 32$.

(2) 因为切线与直线 $y = -\frac{x}{4} + 3$ 垂直,
 所以切线的斜率为 4.

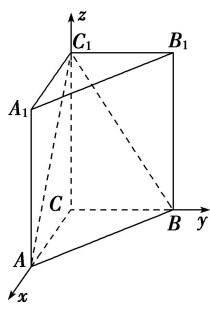
设切点的坐标为 (x_0, y_0) , 则 $f'(x_0) = 3x_0^2 + 1 = 4$,
 所以 $x_0 = \pm 1$,

$$\text{所以 } \begin{cases} x_0 = 1, \\ y_0 = -14 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x_0 = -1, \\ y_0 = -18. \end{cases}$$

即切点坐标为 $(1, -14)$ 或 $(-1, -18)$.

切线方程为 $y = 4(x - 1) - 14$ 或 $y = 4(x + 1) - 18$.

即 $y = 4x - 18$ 或 $y = 4x - 14$.

20. (理) 解: 直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, $AC = 3$, $BC = 4$, $AB = 5$, 故 AC , BC , CC_1 两两垂直,
 建立空间直角坐标系(如图),


则 $C(0, 0, 0)$, $A(3, 0, 0)$, $C_1(0, 0, 4)$, $B(0, 4, 0)$, $B_1(0, 4, 4)$.

(1) 证明: $\vec{AC} = (-3, 0, 0)$, $\vec{BC_1} = (0, -4, 4)$,

所以 $\vec{AC} \cdot \vec{BC_1} = 0$. 故 $AC \perp BC_1$.

(2) 解: 平面 ABC 的一个法向量为 $m = (0, 0, 1)$, 设平面 C_1AB 的一个法向量为 $n = (x, y, z)$,

$\vec{AC_1} = (-3, 0, 4)$, $\vec{AB} = (-3, 4, 0)$,

$$\text{由 } \begin{cases} n \cdot \vec{AC_1} = 0, \\ n \cdot \vec{AB} = 0. \end{cases} \text{ 得 } \begin{cases} -3x + 4z = 0, \\ -3x + 4y = 0, \end{cases}$$

令 $x = 4$, 则 $y = 3$, $z = 3$, $n = (4, 3, 3)$,

$$\text{故 } \cos \langle m, n \rangle = \frac{3}{\sqrt{34}} = \frac{3\sqrt{34}}{34}.$$

即二面角 C_1-AB-C 的余弦值为 $\frac{3\sqrt{34}}{34}$.