秘密★启用前

2018-2019学年度第一学期高二期末测评考试

理科数学(Ⅱ)参考答案及评分参考

一、选择题

1. A 【解析】$\because$ 命题 p 为真,命题 q 也为真,$\therefore p\wedge q$ 为真.

2. A 【解析】$\because$ 直线 $l_1:x-\sqrt{3}y-1=0$ 的斜率为$\frac{\sqrt{3}}{3}$,$\therefore$ 与其垂直的 l_2 直线的斜率为$-\sqrt{3}$,根据点斜式可得直线 l_2 的方程为 $y-\sqrt{3}=-\sqrt{3}(x+1)$,即$\sqrt{3}x+y=0$.

3. D 【解析】因为全称命题的否定是特称命题.第一步是将全称量词改写为存在量词,第二步是将结论加以否定.

4. C 【解析】平行于同一平面的两条直线的位置关系可能是平行、相交或异面.

5. D 【解析】由圆$O:x^2+y^2=1$可得圆心 $O(0,0)$,半径 $r=1$,$\because\triangle OAB$ 为正三角形,$\therefore$ 圆心 O 到直线 $x-y+m=0$ 的距离为 $\frac{\sqrt{3}}{2}r=\frac{\sqrt{3}}{2}$,即 $d=\frac{|m|}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$,解得 $m=\frac{\sqrt{6}}{2}$或$-\frac{\sqrt{6}}{2}$.

6. B【解析】由“$a^2+b^2>c^2$”只能说明$\angle C$ 是锐角,但不能推出“$\triangle ABC$ 是锐角三角形”,但当$\triangle ABC$ 是锐角三角形时,一定有 $a^2+b^2>c^2$成立,故“$a^2+b^2>c^2$”是“$\triangle ABC$ 是锐角三角形”的必要不充分条件.

7. B 【解析】$\because$ 在平行六面体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$中,$\overrightarrow{AC_1}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{DD_1}$ $\therefore x=1,y=-\frac{1}{2},z=\frac{1}{3}$,即 $x+y+z=\frac{5}{6}$.

8. C 【解析】曲线$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$表示椭圆,焦距为 $2c=2\sqrt{a^2-b^2}=2\sqrt{7}$,当 $9<k<16$ 时,曲线$\frac{x^2}{16-k}+\frac{y^2}{9-k}=1$表示双曲线,焦距为 $2c=2\sqrt{a^2+b^2}=2\sqrt{16-k+k-9}=2\sqrt{7}$,故两条曲线的焦距相等.

9. B 【解析】$\because$ 抛物线 $y=\frac{1}{2}x^2$的准线方程为 $y=-\frac{1}{2}$,$\therefore m=\frac{1}{4}$,即离心率 $e=\frac{\sqrt{1+\frac{1}{4}}}{\frac{1}{2}}=\sqrt{5}$.

10. C 【解析】法一:将直三棱柱补成正方体如图 1 所示,则异面直线 BA_1 与 AC_1 所成角的大小与$\angle A_1BD_1$ 相等.
$\because\triangle A_1BD_1$ 为正三角形,故异面直线 BA_1 与 AC_1 所成的角为 60°.

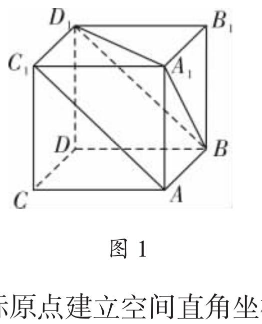


图 1

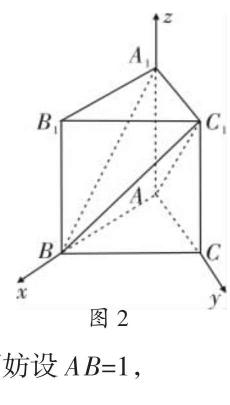


图 2

法二:如图 2,以点 A 为坐标原点建立空间直角坐标系 $A-xyz$,不妨设 $AB=1$,
则 $A(0,0,0)$,$B(1,0,0)$,$A_1(0,0,1)$,$C_1(0,1,1)$.

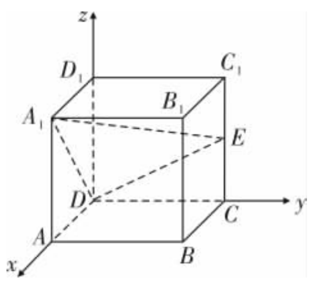
$\cos\langle\overrightarrow{BA_1},\overrightarrow{AC_1}\rangle=\frac{\overrightarrow{BA_1}\cdot\overrightarrow{AC_1}}{|\overrightarrow{BA_1}|\cdot|\overrightarrow{AC_1}|}=\frac{(-1,0,1)\cdot(0,1,1)}{\sqrt{2}\times\sqrt{2}}=\frac{1}{2}$.

$\therefore$ 异面直线 BA_1 与 AC_1 所成的角为 60°.

11. A 【解析】$\because$ 抛物线性 $x^2=8y$ 的焦点为$(0,2)$,$\therefore$ 椭圆的焦点在 y 轴上,且 $c=2$,

$\because$ 离心率为$\frac{1}{2}$,$\therefore n=4$,$m=2\sqrt{3}$,$\therefore m-n=2\sqrt{3}-4$.

12. B 【解析】法一:如图建系 $D-xyz$,$A(2,0,0)$,$A_1(2,0,2)$,$D(0,0,0)$,$E(0,2,1)$.



（第 12 题答图）

设 $M(x,2,z)$,设平面 A_1DE 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x',y',z')$,

$\because\begin{cases}\overrightarrow{DA_1}\cdot\boldsymbol{n}=0,\\ \overrightarrow{DE}\cdot\boldsymbol{n}=0,\end{cases}$ $\therefore\boldsymbol{n}=(2,1,-2)$,又 $\because\overrightarrow{AM}=(x-2,2,z)$,

$\because AM/\!/$平面 A_1DE,$\therefore\overrightarrow{AM}\cdot\boldsymbol{n}=2(x-2)+2-2z=0$,即 $x-z-1=0$,

$\therefore$ 动点 M 的轨迹是以 BC,BB_1 的中点为端点的线段,且这条线段的长为$\sqrt{2}$.

法二:取 BB_1 的中点 P,BC 中点为 Q,则平面 $APQ/\!/$平面 A_1DE,

$\therefore M$ 的轨迹为线段 PQ,且 $PQ=\sqrt{2}$.

二、填空题

13. "若$x\neq1$且$x\neq2$,则$x^2-3x+2\neq0$".【解析】若原命题为"若p,则q",那么它的逆否命题为"若$\neg q$,则$\neg p$".

14. 8 【解析】$\because\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$,$\therefore$存在唯一实数$\lambda$,使得$\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{b}$,即$x+y=6+2=8$.

15. $x^2+y^2=16$ 【解析】设$M(x,y)$,由$|MA|=2|MB|$化简可得$x^2+y^2=16$.

16. $\frac{\sqrt{7}}{3}$ 【解析】$\because|PF_1|=2|PF_2|$,$|PF_1|+|PF_2|=2a$,$\therefore|PF_1|=\frac{4a}{3}$,$|PF_2|=\frac{2a}{3}$.

$\because\angle F_1PF_2=120°$,$\therefore$在$\triangle F_1PF_2$中,$|F_1F_2|^2=|PF_1|^2+|PF_2|^2-2|PF_1||PF_2|\cdot\cos\angle F_1PF_2$,

即$4c^2=\left(\frac{4a}{3}\right)^2+\left(\frac{2a}{3}\right)^2-2\times\frac{4a}{3}\times\frac{2a}{3}\times\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{28a^2}{9}$,$\therefore e=\frac{c}{a}=\sqrt{\frac{7}{9}}=\frac{\sqrt{7}}{3}$.

三、解答题

17. **解:**由 p 可得函数 $f(k)$有意义,则 $k>a$, ………………………………………… 2 分

由 q 可知,若$\frac{x^2}{k+1}+\frac{y^2}{3-k}=1$ 表示双曲线,则$(k+1)(3-k)<0$,即 $k<-1$ 或 $k>3$, ………………………… 5 分

$\therefore\neg q:k\in[-1,3]$.

$\because\neg q$ 是 p 的充分不必要条件,

$\therefore a<-1$. ……………………………………………………………………………… 10 分

18. **解:**(1)由圆C的方程为$x^2+y^2-2x+4y=0$,即$(x-1)^2+(y+2)^2=5$.$\therefore$圆心$C(1,-2)$,半径为$\sqrt{5}$.

又$\because$直线$l:x-2y+t=0$ 与圆C相切,$\therefore$圆心C到直线l的距离$d=\frac{|1+4+t|}{\sqrt{5}}=\sqrt{5}$,即$|t+5|=5$,

解得$t=0$或$t=-10$. …………………………………………………………………… 6分

(2)由题得,圆心$M(-2,4)$,$\because$圆M:$(x+2)^2+(y-4)^2=r^2$ 与圆C有3条公切线,

$\therefore$圆M与圆C相外切,即$|CM|=\sqrt{5}+r$,又$\because|CM|=3\sqrt{5}$,$\therefore$解得$r=2\sqrt{5}$. ……………………… 12分

19. (1)**证明:**$\because A_1R/\!/AQ$,$A_1R\not\subset$平面AQC_1,$AQ\subset$平面AQC_1,$\therefore A_1R/\!/$平面AQC_1.

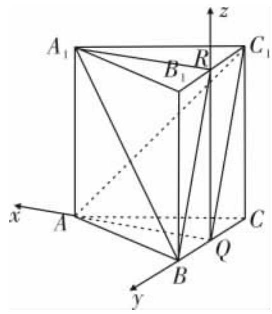
又$\because BR // QC_1$，$BR \not\subset$平面AQC_1，$C_1Q \subset$平面AQC_1，$\therefore BR //$平面AQC_1.

$\because A_1R \cap BR=R$，$AQ \cap C_1Q$，$\therefore$平面$A_1BR //$平面AQC_1. ……………………………………………………… 6分

(2)**解**：以 Q 为坐标原点，建立如图所示的空间直角坐标系 $Q-xyz$，

则 $Q(0,0,0)$，$A(\sqrt{3},0,0)$，$C_1(0,-1,2)$，$C(0,-1,0)$，

$\therefore \overrightarrow{QA}=(\sqrt{3},0,0)$，$\overrightarrow{QC_1}=(0,-1,2)$.



（第 19 题答图）

设平面 AQC_1 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，

由$\begin{cases}\overrightarrow{QA}\cdot\boldsymbol{n}=0,\\ \overrightarrow{QC_1}\cdot\boldsymbol{n}=0\end{cases}$得$\begin{cases}\sqrt{3}x=0,\\ -y+2z=0,\end{cases}$

令 $z=1$，$\therefore \boldsymbol{n}=(0,2,1)$.

又 $\because \overrightarrow{CC_1}=(0,0,2)$，

设直线 CC_1 与平面 AQC_1 所成的角为 φ，

$\therefore \sin\varphi=\left|\cos\langle\overrightarrow{CC_1},\boldsymbol{n}\rangle\right|=\left|\dfrac{2}{2\sqrt{5}}\right|=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$.

故直线 CC_1 与平面 AQC_1 所成角的正弦值为$\dfrac{\sqrt{5}}{5}$. …………………………………………………… 12 分

20. **解**：(1)$\because$直线$x-y-2=0$ 经过抛物线C的焦点，

$\therefore$抛物线C的焦点坐标为$(2,0)$，

$\therefore$抛物线C的准线方程为$x=-2$. ………………………………………………………………………… 4分

(2)设过抛物线 C 的焦点且斜率为-1 的直线方程为 $y=-x+\dfrac{p}{2}$，且直线与 C 交于 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，

由$\begin{cases}y=-x+\dfrac{p}{2},\\ y^2=2px\end{cases}$化简得 $x^2-3px+\dfrac{p^2}{4}=0$，

$\therefore x_1+x_2=3p$.

$\because |AB|=x_1+x_2+p=4p=2$，解得 $p=\dfrac{1}{2}$，

$\therefore$ 抛物线 C 的方程为 $y^2=x$. ………………………………………………………………………… 12 分

21. (1)**证明**：连接 OB. $\because$ $PA=PC$，O 为 AC 的中点，$\therefore PO\perp AC$，$\therefore PO=4\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=2\sqrt{3}$.

又 $\because AB=BC=2\sqrt{2}$，$AC=4$，

$\therefore AB^2+BC^2=AC^2$，即 $AB\perp BC$.

$\therefore$ 在 Rt$\triangle ABC$ 中，$OA=OB=OC=2$.

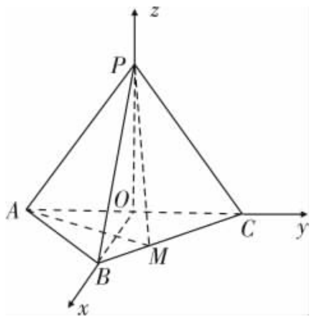
$\because PO^2+OB^2=PB^2$，$\therefore PO\perp OB$.

又 $\because AC\cap OB=O$，

$\therefore PO\perp$平面ABC. ·· 6分

(2)**解**:$\because OB\perp AC$,$PO\perp$平面ABC

$\therefore$ 以 O 为坐标原点,建立如图所示的空间直角坐标系 $O-xyz$,



(第 21 题答图)

则$A(0,-2,0)$,$C(0,2,0)$,$B(2,0,0)$,$P(0,0,2\sqrt{3})$.

设$M(x_m,y_m,0)$,又$\because \overrightarrow{BM}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$,$\therefore M\left(\frac{4}{3},\frac{2}{3},0\right)$.

设平面PAM的法向量为$\boldsymbol{m}=(x,y,z)$,

由$\begin{cases}\overrightarrow{AP}\cdot\boldsymbol{m}=0,\\ \overrightarrow{AM}\cdot\boldsymbol{m}=0\end{cases}$得$\begin{cases}y+\sqrt{3}z=0,\\ x+2y=0.\end{cases}$

令$z=1$,$\therefore \boldsymbol{m}=(2\sqrt{3},-\sqrt{3},1)$,

又$\because$平面PAC的法向量为$\boldsymbol{n}=(1,0,0)$,

$\therefore \cos\langle\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}\rangle=\frac{\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{m}|\cdot|\boldsymbol{n}|}=\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{(2\sqrt{3})^2+(\sqrt{3})^2+1}}=\frac{2\sqrt{3}}{4}=\frac{\sqrt{3}}{2}$. ································· 10分

故所求二面角$M-PA-C$的大小为$30°$. ··· 12分

22. **解**:(1)由题意得$\begin{cases}\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{2}}{2},\\ a^2=b^2+c^2,\\ b=2,\end{cases}$ 解得$a^2=8$,$b^2=4$.

$\therefore$椭圆C的标准方程为$\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{4}=1$. ··· 4分

(2)设$M(x_0,y_0)$,且$x_0^2+y_0^2=12$,

由题意知,过点M引椭圆C的切线方程可设为$y-y_0=k(x-x_0)$,

联立$\begin{cases}y-y_0=k(x-x_0),\\ \frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{4}=1\end{cases}$ 化简得$(1+2k^2)x^2+4k(y_0-kx_0)x+2(y_0-kx_0)^2-8=0$.

$\because$直线与椭圆相切,

$\therefore \Delta=[4k(y_0-kx_0)]^2-4(1+2k^2)[2(y_0-kx_0)^2-8]=0$.

化简得$(x_0^2-8)k^2-2x_0y_0k+y_0^2-4=0$. ··· 10分

$\therefore k_1\cdot k_2=\frac{y_0^2-4}{x_0^2-8}=\frac{y_0^2-4}{12-y_0^2-8}=\frac{y_0^2-4}{4-y_0^2}=-1$.

$\therefore$两条切线斜率的积为定值. ·· 12分