

# 数 学 试 卷

本试卷共 4 页, 150 分。考试时长 120 分钟。考生务必将答案答在答题卡上, 在试卷上作答无效。考试结束后, 将答题卡收回。

## 第一部分 (选择题 共 50 分)

一、选择题共 10 小题, 每小题 5 分, 共 50 分。在每小题列出的四个选项中, 选出符合题目要求的一项。

(1) 在空间直角坐标系中, 已知点  $A(1,0,1)$ ,  $B(3,2,1)$ , 则线段  $AB$  的中点坐标是

- (A)  $(1,1,0)$       (B)  $(2,1,1)$       (C)  $(2,2,0)$       (D)  $(4,2,2)$

(2) 若  $a < b < 0$ , 则下列不等式中不正确的是

- (A)  $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$       (B)  $|a| > |b|$       (C)  $\frac{1}{a-b} > \frac{1}{a}$       (D)  $a^2 > b^2$

(3) 在等差数列  $\{a_n\}$  中,  $a_1 = 5$ ,  $a_4 + a_7 = 0$ , 则数列  $\{a_n\}$  中为正数的项的个数为

- (A) 4      (B) 5      (C) 6      (D) 7

(4) 已知函数  $f(x) = x + \frac{1}{x-1} - 1 (x > 1)$ , 则  $f(x)$  有

- (A) 最小值 2      (B) 最大值 2      (C) 最小值 0      (D) 最大值 0

(5) 已知椭圆  $kx^2 + 5y^2 = 5$  的一个焦点坐标是  $F(2,0)$ , 则实数  $k$  的值为

- (A)  $\sqrt{5}$       (B)  $\frac{5\sqrt{3}}{3}$       (C)  $\frac{5}{3}$       (D) 1

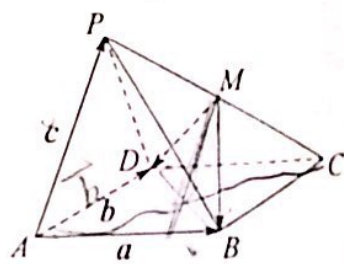
(6) 在四棱锥  $P-ABCD$  中, 底面  $ABCD$  为平行四边形.

若  $\vec{AB} = \vec{a}$ ,  $\vec{AD} = \vec{b}$ ,  $\vec{AP} = \vec{c}$ ,  $M$  为  $PC$  中点, 则

$\vec{MB} + \vec{MD} =$

- (A)  $\vec{c}$       (B)  $-\frac{1}{2}\vec{a} + \vec{b} - \frac{1}{2}\vec{c}$

- (C)  $-\vec{c}$       (D)  $-\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} + \vec{c}$



(7) “ $m > 0, n > 0$ ” 是 “方程  $\frac{x^2}{m} + \frac{y^2}{n} = 1$  表示椭圆” 的

(A) 充分而不必要条件

(B) 必要而不充分条件

(C) 充分必要条件

(D) 既不充分也不必要条件

(8) 在长方体  $ABCD-A_1B_1C_1D_1$  中,  $AB=BC=2$ ,  $AA_1=2\sqrt{3}$ , 则异面直线  $AD_1$  与  $DB_1$  所成角的余弦值为

(A)  $\frac{\sqrt{5}}{5}$

(B)  $\frac{\sqrt{5}}{6}$

(C)  $\frac{1}{5}$

(D)  $\frac{\sqrt{2}}{2}$

(9) 已知点  $A$  在直线  $y=4$  上, 动点  $P$  满足  $\overrightarrow{AP}$  平行于  $y$  轴, 且  $\overrightarrow{OA} \perp \overrightarrow{OP}$ , 则点  $P$  的轨迹是

(A) 圆

(B) 椭圆

(C) 双曲线

(D) 抛物线

(10) 已知直线  $y=2$  与双曲线  $\Gamma: \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$  的渐近线交于  $M, N$  两点, 任取双曲线  $\Gamma$  上的一点  $P$ , 若  $\overrightarrow{OP} = \lambda \overrightarrow{OM} + \mu \overrightarrow{ON}$  ( $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ ), 则

(A)  $\lambda + \mu = -\frac{1}{4}$

(B)  $\lambda - \mu = \frac{1}{4}$

(C)  $\lambda\mu = -\frac{1}{4}$

(D)  $\frac{\lambda}{\mu} = -\frac{1}{4}$

## 第二部分 (非选择题 共 100 分)

二、填空题共 6 小题, 每小题 5 分, 共 30 分.

(11) 已知命题  $p: \forall x \geq 0, \sin x \leq 1$ , 则  $\neg p$ : \_\_\_\_\_.

(12) 已知向量  $a = (1, -2, 5)$ ,  $b = (-1, x, 3)$ . 若  $a \perp b$ , 则实数  $x =$  \_\_\_\_\_.

(13) 已知双曲线  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$  ( $a > 0, b > 0$ ) 的离心率为  $\sqrt{2}$ , 则该双曲线的渐近线方程为 \_\_\_\_\_; 若  $(2, 0)$  是它的一个焦点, 则  $a =$  \_\_\_\_\_.

(14) 设  $a = (x_1, y_1, z_1)$ ,  $b = (x_2, y_2, z_2)$ , 能说明 " $a \parallel b \Rightarrow \frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = \frac{z_1}{z_2}$ " 是假命题的一组向量为  $a =$  \_\_\_\_\_,  $b =$  \_\_\_\_\_.

(15) 已知等比数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和为  $S_n$ , 下表给出了  $S_n$  的部分数据:

$n$	1	2	3	4	...
$S_n$		-1	$\frac{7}{2}$	$-\frac{13}{4}$	...

则数列  $\{a_n\}$  的公比  $q =$  \_\_\_\_\_, 首项  $a_1 =$  \_\_\_\_\_.

(16) 已知数列  $\{a_n\}$  的通项公式为  $a_n = 5n - 8$ , 则  $a_1 + a_3 + a_5 + \dots + a_{2m+3} =$  \_\_\_\_\_;

若  $\frac{a_m a_n}{mn} > 9$  ( $m, n \in \mathbb{N}^*$ ), 则  $m + n$  的最小值为 \_\_\_\_\_.

三、解答题共5小题，共70分。解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤。

(17) (本小题满分14分)

已知  $f(x) = (x-a)(x-2)$ .

(I) 当  $a=1$  时，求不等式  $f(x) > 0$  的解集；

(II) 解关于  $x$  的不等式  $f(x) < 0$ .

(18) (本小题满分14分)

在等差数列  $\{a_n\}$  和等比数列  $\{b_n\}$  中， $a_1 = b_1 = 2$ ， $a_2 = b_2$ ， $a_4 = b_3$ .

(I) 求数列  $\{a_n\}$  和  $\{b_n\}$  的通项公式；

(II) 设  $c_n = a_n + b_n$ ，求数列  $\{c_n\}$  的前  $n$  项和  $S_n$ .

(19) (本小题满分14分)

已知抛物线  $C$  的顶点为坐标原点，过焦点  $F(2,0)$  的直线  $l$  与抛物线  $C$  交于不同的两点  $A, B$ .

(I) 求抛物线  $C$  的方程及准线方程；

(II) 求线段  $AB$  长的最小值.

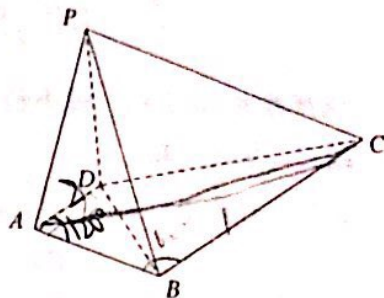
(20) (本小题满分 14 分)

如图, 在四棱锥  $P-ABCD$  中, 平面  $PAD \perp$  平面  $ABCD$ ,  $PD \perp AD$ ,  $PA = 2AD$ ,  $AD \parallel BC$ ,  $DB = DC$ ,  $AD = 2$ ,  $BC = 6$ ,  $\angle ABC = 60^\circ$ .

(I) 求证:  $PD \perp BC$ ;

(II) 求二面角  $D-PA-B$  的余弦值;

(III) 求证:  $AB \perp$  平面  $PCD$ .



(21) (本小题满分 14 分)

已知椭圆  $M: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$  的一个焦点为  $(\sqrt{2}, 0)$ , 离心率为  $\frac{\sqrt{6}}{3}$ . 设椭圆  $M$  的长轴和短轴的一个端点分别为  $A, B$ , 以原点  $O$  为圆心, 线段  $AB$  的长为半径作圆  $O$ .

(I) 求椭圆  $M$  和圆  $O$  的方程;

(II) 设点  $P$  为圆  $O$  上任意一点, 过点  $P$  分别作两条直线  $l_1, l_2$  与椭圆  $M$  相切, 求证:  $l_1 \perp l_2$ .