2018年秋高二(上)期末测试卷

理科数学

理科数学测试卷共4页。满分150分。考试时间120分钟。

注意事项：

1. 本试卷分为第Ⅰ卷（选择题）和第Ⅱ卷（非选择题）两部分。答卷前，考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上。
2. 回答第Ⅰ卷时，选出每小题答案后，用2B铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦擦干净后，再选涂其它答案标号框。写在本试卷上无效。
3. 回答第Ⅱ卷时，将答案写在答题卡上，写在本试卷上无效。
4. 考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

第Ⅰ卷

一、选择题：本大题共12小题，每小题5分，共60分。在每小题给出的四个备选项中，只有一项是符合题目要求的。

（1） 直线$\sqrt{3}x+y-1=0$的倾斜角为

（A）30°　　（B）60°　　（C）120°　　（D）150°

（2） 在一个命题和它的逆命题，否命题，逆否命题这四个命题中，真命题的个数不可能是

（A）0　　（B）2　　（C）3　　（D）4

（3） 命题“$\forall x\in(0,+\infty)$，$e^x>\ln x$.”的否定是

（A）$\forall x\in(0,+\infty)$，$e^x\leqslant\ln x$　　（B）$\exists x\in(0,+\infty)$，$e^x>\ln x$

（C）$\exists x\in(0,+\infty)$，$e^x\leqslant\ln x$　　（D）$\exists x\in(0,+\infty)$，$e^x<\ln x$

（4） 已知空间中的三条直线a,b,c满足$a\perp c$且$b\perp c$，则直线a与直线b的位置关系是

（A）平行　　（B）相交　　（C）异面　　（D）平行或相交或异面

（5） 若圆$x^2+y^2+2x-2y+m=0$的半径为$\sqrt{3}$，则实数$m=$

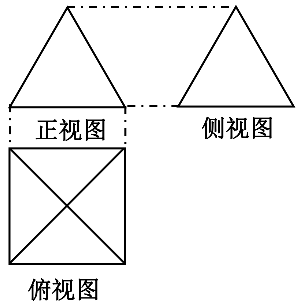
（A）$-\frac{3}{2}$　　（B）-1　　（C）1　　（D）$\frac{3}{2}$

（6） 已知直线l与平面α,β，则下列说法正确的是

（A）若$l\parallel\alpha,\alpha\parallel\beta$，则$l\parallel\beta$　　（B）若$l\perp\alpha,\alpha\perp\beta$，则$l\parallel\beta$

（C）若$l\subset\alpha,l\parallel\beta$，则$\alpha\parallel\beta$　　（D）若$l\subset\alpha,l\perp\beta$，则$\alpha\perp\beta$

（7） 已知某几何体的三视图如图所示，其正视图与侧视图都是边长为1的正三角形，俯视图为正方形，则该几何体的表面积是



（A）1 （B）2

（C）$1+\sqrt{3}$ （D）3

（8） 已知某圆柱形容器的轴截面是边长为2的正方形，容器中装满液体，现向此容器中放入一个实心小球，使得小球完全被液体淹没，则此时容器中所余液体的最小容量为

（A）$\dfrac{\pi}{3}$ （B）$\dfrac{2\pi}{3}$ （C）π （D）$\dfrac{4\pi}{3}$

（9） 条件甲：关于x的不等式$a\sin x+b\cos x>1$的解集为空集，条件乙：$|a|+|b|\leqslant 1$，则甲是乙的

（A）必要不充分条件 （B）充分不必要条件

（C）充要条件 （D）既不充分也不必要条件

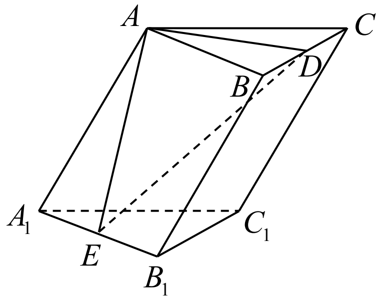
（10）已知椭圆$C:\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{7}=1$的左焦点为$F$，点$A(-\sqrt{2},1)$，$P$为椭圆$C$上一动点，则$\Delta PAF$的周长的最小值为

（A）3 （B）4 （C）7 （D）10

（11）椭圆$C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$（$a>b>0$）的左右焦点分别为$F_1$，$F_2$，抛物线$y^2=2px$（$p>0$）以$F_2$为焦点，且椭圆与抛物线在第一象限交于点$P$，若$\angle PF_1F_2=45^\circ$，则椭圆$C$的离心率为

（A）$2-\sqrt{3}$ （B）$\sqrt{2}-1$ （C）$\dfrac{1}{2}$ （D）$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

（12）斜棱柱$ABC-A_1B_1C_1$中，D，E分别为棱BC，A_1B_1的中点，过A，D，E三点的平面将三棱柱分为两部分，则这两部分体积之比为



（A）$\dfrac{1}{3}$ （B）$\dfrac{3}{8}$

（C）$\dfrac{7}{17}$ （D）$\dfrac{8}{19}$

第Ⅱ卷

二、填空题：本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

（13）过原点且与直线 $4x+7y+1=0$ 平行的直线方程是________.

（14）已知三棱锥 $A-BCD$ 中，AB, AC, AD 两两相互垂直，且 $AB=3$，$AC=4$，$AD=12$，则三棱锥 $A-BCD$ 外接球的表面积为________.

（15）已知过原点的动直线 l 与椭圆 $C:\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{2}=1$ 交于 A, B 两点，D 为椭圆 C 的上顶点，若直线 AD, BD 的斜率存在且分别为 k_1, k_2，则 $k_1k_2=$________.

（16）若圆 $(x-3)^2+(y-4)^2=2$ 上存在两点 A, B，使得 $\angle APB=60^\circ$，P 为圆外一动点，则 P 点到原点距离的最小值为________.

三、解答题：解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤。

（17）（本小题满分 10 分）

已知 $a>0$，命题 $p:x^2-x-12\leqslant 0$，命题 $q:(x-2)^2\geqslant a^2$.

（Ⅰ）当 $a=3$ 时，若命题 $p\wedge(\neg q)$ 为真，求 x 的取值范围；

（Ⅱ）若 p 是 $\neg q$ 的充分条件，求 a 的取值范围.

（18）（本小题满分 12 分）

在 ΔABC 中，边 AB, AC, BC 所在直线的方程分别为 $y=-1, x-3y-5=0, x+2y-5=0$.

（Ⅰ）求 BC 边上的高所在的直线方程；

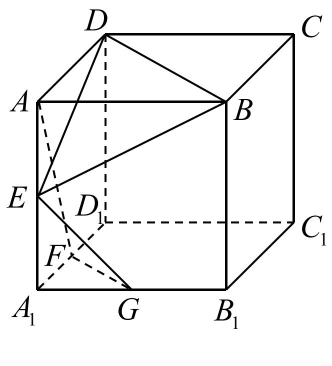
（Ⅱ）若圆 E 过直线 $x-y-5=0$ 上一点及 A 点，当圆 E 面积最小时，求其标准方程.

（19）（本小题满分 12 分）

如图，棱长为 2 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，点 E, F, G 分别是棱 AA_1, A_1D_1, A_1B_1 的中点.

（Ⅰ）求证：直线 $FG\,//$ 平面 DBE；

（Ⅱ）求异面直线 AF 和 EG 所成角的余弦值.



（20）（本小题满分 12 分）

已知抛物线$C: y^2=2px$（$p>0$）的焦点为F，$M(3,\ m)$为抛物线C上一点，且$|MF|=5$.

（Ⅰ）求抛物线C的方程;

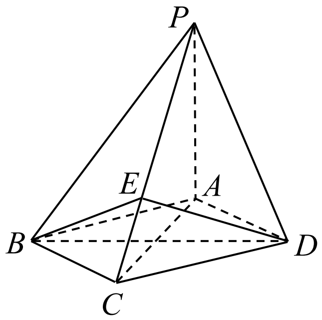
（Ⅱ）过点F的直线与抛物线C交于$A,\ B$两点，求线段AB的垂直平分线的横截距的取值范围.

（21）（本小题满分 12 分）

如图，四棱锥$P-ABCD$中，底面$ABCD$为菱形，直线$PA\perp$平面$ABCD$，$AC=3\sqrt{2}$，$PA=3$，E是PC上的一点，$PE=2EC$.

（Ⅰ）证明：直线$PC\perp$平面BED；

（Ⅱ）若$BD=3\sqrt{2}$，求二面角$P-AD-E$的余弦值.

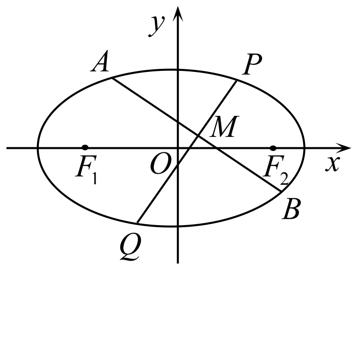


（22）（本小题满分 12 分）

如图，F_1、F_2是离心率为$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$的椭圆$C: \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的左、右焦点，过$F_1$作$x$轴的垂线交椭圆$C$所得弦长为$2\sqrt{2}$，设$A$、$B$是椭圆$C$上的两个动点，线段$AB$的中垂线与椭圆$C$交于$P$、$Q$两点，线段$AB$的中点$M$的横坐标为$1$.

（Ⅰ）求椭圆C的方程;

（Ⅱ）求$\overrightarrow{F_2P}\cdot\overrightarrow{F_2Q}$的取值范围.



2018年秋高二(上)期末测试卷

理科数学　参考答案

一、选择题

1～6 CCCDBD　　　7～12 DBABBC

（1） 解析：$\tan\theta=-\sqrt{3}, \therefore \theta=120^\circ$

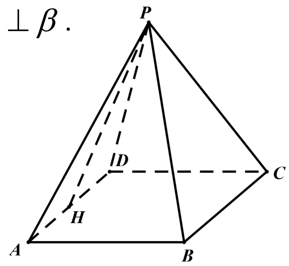
（2） 解析：一个命题与它的逆命题、否命题、逆否命题中，互为逆否命题的命题有2对，根据互为逆否命题的两个命题真假性相同，这四个命题中真命题个数可以为0、2或4

（3） 解析：命题“$\forall x\in(0,+\infty)$，$e^x>\ln x$.”的否定是$\exists x\in(0,+\infty)$，$e^x\leqslant \ln x$

（4） 解析：空间中的三条直线a,b,c满足$a\perp c$且$b\perp c$，则直线a与直线b的位置关系是平行或相交或异面

（5） 解析：圆的方程为$(x+1)^2+(y-1)^2=2-m=3, \therefore m=-1$

（6） 解析：A、B选项中，直线l 都可以在平面β内，故错误；C选项中，α内要有两条相交直线均与β平行，才有$\alpha//\beta$，故错误；D选项中，α内有一条直线与β垂直，则$\alpha\perp\beta$.



（7） 解析：该几何体的直观图为如图所示的正四棱锥$P-ABCD$，

且$AB=1, PH=1$，其中$PH\perp AD$于H，

故表面积为$4\times\frac{1}{2}\times1\times1+1\times1=3$.

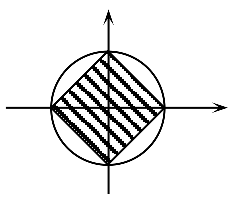
（8） 解析：圆柱的轴截面是边长为2的正方形，故圆柱底面半径为1，母线长为2，当小球与圆柱的侧面或上下底面相切时所余液体容量最小，又$r\leqslant\frac{1}{2}l$，故小球恰好与圆柱侧面和底面同时相切，此时小球的体积为$\frac{4\pi}{3}$，所余液体容量为$2\pi-\frac{4\pi}{3}=\frac{2\pi}{3}$.

（9） 解析：$a\sin x+b\cos x=\sqrt{a^2+b^2}\sin(x+\varphi)>1$的解集为空集，

即$\sqrt{a^2+b^2}\leqslant1$，即$a^2+b^2\leqslant1$，

又$a^2+b^2\leqslant1$，$|a|+|b|\leqslant1$的取值范围如图所示，

所以甲是乙的必要不充分条件.

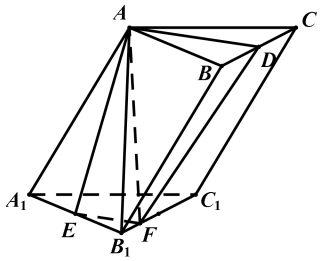


（10）解析：设椭圆的右焦点为F'，则ΔPAF的周长为

$|PA|+|AF|+|FP|=|PA|+1+6-|PF'|=7+|PA|-|PF'|\geqslant7-|AF'|$，当且仅当$P$位于$F'A$的延长线与椭圆的交点时，等号成立，所以周长的最小值为4.

（11）解析：抛物线的准线l与x轴交点为F_1，过点P向直线l作垂线，垂足为Q，设$|PF_2|=m$，则$|PQ|=m$，$|QF_1|=m$，$|PF_1|=\sqrt{2}m$，则$P(m-c, m)$，代入抛物线方程得$m^2=4c(m-c)$，$\therefore m=2c$，故$P(c, 2c)$，又点P在椭圆上，$\therefore 2c=\frac{b^2}{a}$，即$2ac=a^2-c^2$，$e^2+2e-1=0$，$\therefore e=\sqrt{2}-1$.

（12）解析：在 B_1C_1 上取靠近 B_1 的四等分点 F，连接 $EF，FD$，则 $EF//AD$，故梯形 $ADFE$ 为截面，



$V_{BB_1EFDA}=V_{A-BB_1FD}+V_{A-EB_1F}$，设斜棱柱的体积为 V，

则 $V_{A-EB_1F}=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}V=\frac{1}{24}V$，

又 $S_{梯形B_1FDB}=\frac{3}{8}S_{▱BCC_1B_1}$，故 $V_{A-BB_1FD}=2V\times\frac{3}{8}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{4}V$，

故 $V_{BB_1EFDA}=\frac{7}{24}V$，

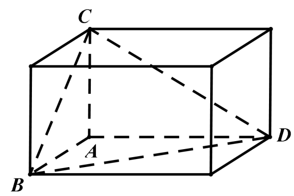
$\therefore$ 两部分的体积比为 $\frac{7}{17}$，选 C.

二、填空题

（13）$4x+7y=0$　　（14）169π　　（15）$-\frac{2}{3}$　　（16）$5-2\sqrt{2}$

（13）解析：过原点且与直线 $4x+7y+1=0$ 平行的直线方程是 $4x+7y=0$

（14）解析：由 $AB，AC，AD$ 两两垂直知，可将三棱锥 $A-BCD$ 补成如图所示的长方体，此长方体的外接球即为三棱锥的外接球，



故 $2R=\sqrt{3^2+4^2+12^2}=13$，

所以三棱锥外接球的表面积为 169π.

（15）解析：由题知 $D(0,\sqrt{2})$，可设 $A(x_1,y_1)，B(-x_1,-y_1)$，则 $k_1k_2=\frac{y_1-\sqrt{2}}{x_1}\cdot\frac{-y_1-\sqrt{2}}{-x_1}=\frac{{y_1}^2-2}{{x_1}^2}$，

又 A 在椭圆上，故 $\frac{{x_1}^2}{3}+\frac{{y_1}^2}{2}=1$，$\therefore k_1k_2=-\frac{2}{3}$.

（16）解析：对于点 P，若圆上存在两点 $A，B$ 使得 $\angle APB=60^\circ$，只需由点 P 引圆的两条切线所夹角不小于 60° 即可，从而点 P 距圆心 $(3,4)$ 的距离要不超过 $2\sqrt{2}$，故动点 P 在以 $(3,4)$ 为圆心，半径为 $(\sqrt{2},2\sqrt{2}]$ 的圆环内运动，$\therefore |OP|$ 的最小值为 $5-2\sqrt{2}$.

三、解答题

（17）（本小题满分 10 分）

解：（Ⅰ）$p:-3\leqslant x\leqslant 4$，$\neg q:-1<x<5$，若 $p\wedge(\neg q)$ 为真，则 $-1<x\leqslant 4$；……5 分

（Ⅱ）$\neg q:2-a<x<2+a$，若 p 是 $\neg q$ 的充分条件，则 $[-3,4]\subseteq(2-a,2+a)$，

即 $2-a<-3$ 且 $2+a>4$，$\therefore a>5$.　　……10 分

（18）（本小题满分 12 分）

解：（Ⅰ）由 $\begin{cases}y=-1\\x-3y-5=0\end{cases}$ 解得点 $A(2,-1)$，又直线 BC 的斜率为 $-\frac{1}{2}$，

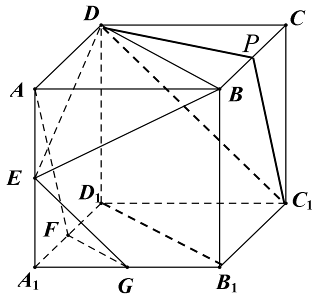
故 BC 边上的高所在直线方程为 $y+1=2(x-2)$ 即 $2x-y-5=0$； ……6 分

（Ⅱ）过点 A 向直线 $x-y-5=0$ 作垂线，垂足记为 D，显然，当圆 E 以线段 AD 为直径时面积最小，

由 $\begin{cases}x-y-5=0\\y+1=-(x-2)\end{cases}$ 解得点 $D(3,-2)$，故圆 E 的圆心为 $(\frac{5}{2},-\frac{3}{2})$，半径为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$，

$\therefore$ 其标准方程为 $(x-\frac{5}{2})^2+(y+\frac{3}{2})^2=\frac{1}{2}$． ……12 分

（19）（本小题满分 12 分）



解：（Ⅰ）连接 D_1B_1，则 $FG//D_1B_1$，又 $D_1B_1//DB$，

$\therefore FG//DB$，又 $FG\not\subset$ 平面 DBE，

故直线 $FG//$ 平面 DBE；……6 分

（Ⅱ）取棱 BC 的中点 P，连接 PC_1, PD, DC_1，

则 $PC_1//AF$，$DC_1//EG$，

故异面直线 AF 与 EG 所成的角即为 $\angle DC_1P$，由题知 $C_1P=\sqrt{5}, C_1D=2\sqrt{2}, DP=\sqrt{5}$，

$\therefore \cos\angle DC_1P=\dfrac{8+5-5}{2\cdot 2\sqrt{2}\cdot\sqrt{5}}=\dfrac{\sqrt{10}}{5}$． ……12 分

（20）（本小题满分 12 分）

解：（Ⅰ）由抛物线的定义知 $|MF|=x_M+\frac{p}{2}$，即 $3+\frac{p}{2}=5$，$\therefore p=4$，故抛物线 C 的方程为 $y^2=8x$；

……4 分

（Ⅱ）设直线 AB 的方程为 $x=my+2$，与抛物线 C 联立得 $y^2-8my-16=0$，

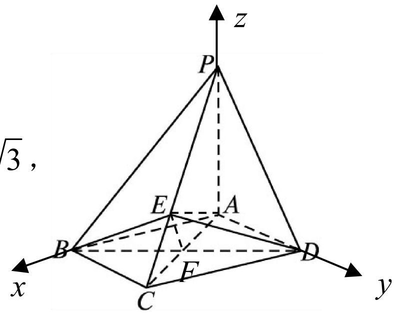
$\therefore$ 线段 AB 中点纵坐标为 $4m$，横坐标为 $4m^2+2$，

$\therefore AB$ 的垂直平分线方程为 $y-4m=-m(x-4m^2-2)$，令 $y=0$ 得 $x=4m^2+6$，

由题知直线 AB 不与 x 轴垂直，否则其中垂线的横截距不存在，即 $m\neq 0$，

$\therefore x\in(6,+\infty)$． ……12 分

（21）（本小题满分 12 分）



解：（Ⅰ）设 $AC\cap BD=F$，则连接 EF，$\because PA\perp$ 平面 $ABCD$，

$\therefore PA\perp BD$，又 $BD\perp AC$，$\therefore BD\perp$ 面 PAC，$\therefore BD\perp PC$，

在 $Rt\Delta PAC$ 中，$PA=3, AC=3\sqrt{2}$，故 $PC=3\sqrt{3}$，$\therefore CE=\sqrt{3}$，

$\dfrac{CE}{CF}=\dfrac{\sqrt{3}}{\frac{3\sqrt{2}}{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}=\dfrac{AC}{PC}$，$\therefore \Delta CEF\sim\Delta CAP$，故 $CP\perp EF$，

$\therefore PC\perp$ 平面 BED；……6 分

（Ⅱ）由题知 $PA\perp$ 平面 $ABCD$，$ABCD$ 为正方形，故以 A 为原点，

$\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AP}$ 所在方向分别为 x，y，z 轴的正半轴建立空间坐标系，

则 $A(0,0,0)$，$D(0,3,0)$，$P(0,0,3)$，$C(3,3,0)$，$\because \overrightarrow{CE}=\frac{1}{3}\overrightarrow{CP}$，故 $E(2,2,1)$，

显然平面 PAD 的一个法向量为 $(1,0,0)$，$\overrightarrow{AD}=(0,3,0), \overrightarrow{AE}=(2,2,1)$，

设平面 ADE 的一个法向量为 $\vec{n}=(x,y,z)$，则 $\begin{cases}3y=0\\2x+2y+z=0\end{cases}$，令 $x=1$，得 $\vec{n}=(1,0,-2)$，

故 $\cos\theta=\frac{1}{1\cdot\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{5}}{5}$，此即为二面角 $P-AD-E$ 的余弦值. ……12 分

（22）（本小题满分 12 分）

解：（Ⅰ）由题知 $\begin{cases}\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{2}}{2}\\\frac{2b^2}{a}=2\sqrt{2}\end{cases}$，故 $a=2\sqrt{2}, b=2$，椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{4}=1$；……4 分

（Ⅱ）设 $A(x_1,y_1), B(x_2,y_2), M(x_0,y_0)$，直线 AB 的斜率为 k，则 $\begin{cases}\frac{{x_1}^2}{8}+\frac{{y_1}^2}{4}=1\\\frac{{x_2}^2}{8}+\frac{{y_2}^2}{4}=1\end{cases}$，

两式相减得 $\frac{x_0}{4}+\frac{y_0}{2}k=0$，又 $x_0=1$，$\therefore ky_0=-\frac{1}{2}$，直线 PQ 的方程为 $y-y_0=-\frac{1}{k}(x-x_0)$

即 $x=1+ky_0-ky=\frac{1}{2}-ky$，与椭圆 C 联立得 $(k^2+2)y^2-ky-\frac{31}{4}=0$，则 $y_P+y_Q=\frac{k}{k^2+2}$，

$y_Py_Q=-\frac{31}{4(k^2+2)}$，

故 $\overrightarrow{F_2P}\cdot\overrightarrow{F_2Q}=(x_P-2)(x_Q-2)+y_Py_Q=(ky_P+\frac{3}{2})(ky_Q+\frac{3}{2})+y_Py_Q$

$=(k^2+1)y_Py_Q+\frac{3}{2}k(y_P+y_Q)+\frac{9}{4}=-\frac{31(k^2+1)}{4(k^2+2)}+\frac{3k^2}{2(k^2+2)}+\frac{9}{4}=-4+\frac{19}{4(k^2+2)}$，

由题知 $y_0=-\frac{1}{2k}\in(-\sqrt{\frac{7}{2}}, \sqrt{\frac{7}{2}})$，故 $k^2>\frac{1}{14}$，故 $\overrightarrow{F_2P}\cdot\overrightarrow{F_2Q}\in(-4,-\frac{99}{58})$，显然 $k\neq0$，

而直线 AB 的斜率不存在时，P, Q 即为椭圆的左右顶点，

故 $\overrightarrow{F_2P}\cdot\overrightarrow{F_2Q}=(-2\sqrt{2}-2)(2\sqrt{2}-2)=-4$，综上所述，$\overrightarrow{F_2P}\cdot\overrightarrow{F_2Q}\in[-4,-\frac{99}{58})$. ……12 分