

1907 绍兴上虞高二下期末考数学试卷

选择题部分（共 40 分）

一、选择题：本大题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 集合 $A = \{0, 2, a\}$, $B = \{1, a^2\}$. 若 $A \cup B = \{0, 1, 2, 4, 16\}$, 则 a 的值为

- A. 0 B. 1 C. 2 D. 4

2. 双曲线 $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{12} = 1$ 的焦点到渐近线的距离为

- A. 1 B. 2 C. $\sqrt{3}$ D. $2\sqrt{3}$

3. 若实数 x, y 满足 $\begin{cases} 2x - y \leq 0 \\ x + y \leq 3 \\ x \geq 0 \end{cases}$, 则 $2x + y$ 的最大值为

- A. 3 B. 4 C. 5 D. 6

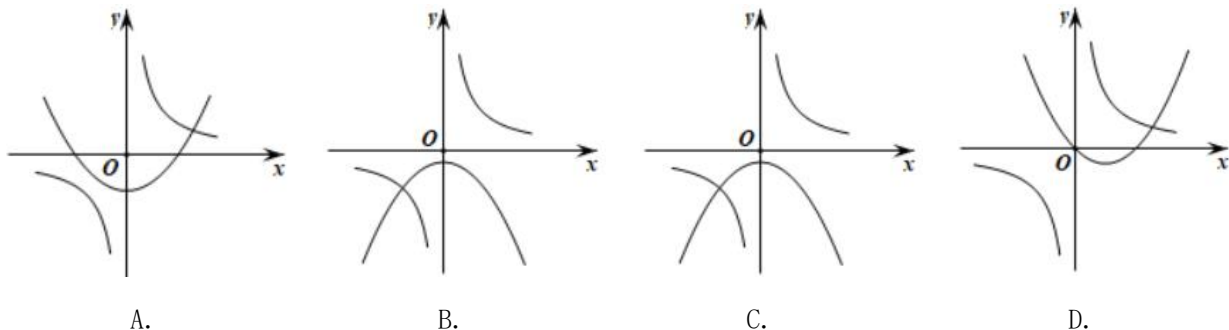
4. 若实数 a, b 满足 $\log_a 2 < \log_b 2$, 则下列关系中不可能成立的是

- A. $0 < b < a < 1$ B. $0 < a < 1 < b$ C. $a > b > 1$ D. $0 < b < 1 < a$

5. 在我国南北朝时期，数学家祖暅在实践的基础上提出来体积计算原理：“幂势相同，则积不容异”。其意思是用一组平行平面截两个几何体，若在任意等高处的截面面积都对应相等，则两个几何体的体积必然相等。根据祖暅原理，“两个几何体 A, B 的体积不相等”时“ A, B 在等高处的截面面积不恒相等”的

- A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件 C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件

6. 函数 $y = ax^2 + a$ 与 $y = \frac{a}{x}$ ($a \neq 0$) 在同一坐标系的图象可能是



7. 已知圆 $(x+1)^2 + y^2 = 12$ 的圆心为 C , 点 P 是直线 $l: mx - y - 5m + 4 = 0$ 上的点, 若圆 C 上存在点 Q 使 $\angle CPQ = 60^\circ$, 则实数 m 的取值范围是

- A. $[1 - \frac{\sqrt{30}}{6}, 1 + \frac{\sqrt{30}}{6}]$ B. $(-\infty, 1 - \frac{\sqrt{30}}{6}] \cup [1 + \frac{\sqrt{30}}{6}, +\infty)$
 C. $[0, \frac{12}{5}]$ D. $(-\infty, 0] \cup [\frac{12}{5}, +\infty)$

8. 已知椭圆 $C_1: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 与双曲线 $C_2: \frac{x^2}{m^2} - \frac{y^2}{n^2} = 1 (m > 0, n > 0)$ 有相同的焦点 F_1, F_2 , 点 P 使两曲线的一个公共点, 且 $\angle F_1PF_2 = 60^\circ$, 若椭圆离心率 $e_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}$, 则双曲线 C_2 的离心率 $e_2 =$

- A. $\frac{\sqrt{7}}{2}$ B. $\frac{\sqrt{6}}{2}$ C. 2 D. 3

9. 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle ACB = \frac{\pi}{2}$, $AC = BC$, 现将 $\triangle ABC$ 绕 BC 所在直线旋转至 $\triangle PBC$, 设二面角 $P-BC-A$ 的大小为 θ , PB 与平面 ABC 所成角为 α , PC 与平面 PAB 所成角为 β , 若 $0 < \theta < \pi$, 则

- A. $\alpha > \theta$ B. $\beta < \theta$ C. $0 < \alpha \leq \frac{\pi}{4}$ D. $\frac{\pi}{4} < \beta < \frac{\pi}{2}$

10. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = \frac{1}{2}$, $a_n = 1 + \ln a_{n+1}$, $n \in \mathbb{N}^*$, 设 T_n 为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项之积, 则 $T_{19} \in$

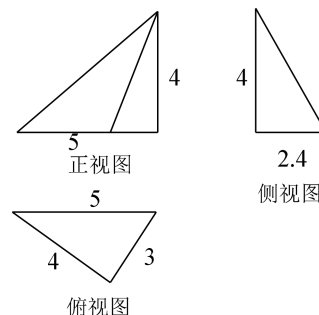
- A. $(0, \frac{1}{20}]$ B. $(\frac{1}{20}, \frac{1}{10}]$ C. $(\frac{1}{10}, \frac{1}{5}]$ D. $(\frac{1}{5}, 1)$

非选择题部分 (共 110 分)

二、填空题: 本大题共 7 小题, 多空题每题 6 分, 单空题每题 4 分, 共 36 分。

11. $\sin \frac{17\pi}{6} =$; $2^{2\log_2 3} =$.

12. 已知某几何体的三视图如图所示, 则该几何体的体积为; 表面积为.



13. 复数 $z = a - i$ 且 $\frac{z}{1+i} = 1 + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$, i 为虚数单位), 则 $ab =$; $|z| =$.

14. 在 $\triangle ABC$ 中, D 在边 AB 上, CD 平分 $\angle ACB$, 若 $AC = 2$, $BC = 1$, 且 $CD = \frac{2}{3}\sqrt{3}$, 则 $AB =$; $\triangle ABC$ 的面积为.

15. 已知正数 x, y 满足 $x + 2y = 3$, 则 $\frac{2y}{x} + \frac{1}{2y}$ 的最小值.

16. 已知平面向量 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ 满足 $|\vec{a}| = 1, |\vec{b}| = 1, |\vec{c} - (\vec{a} + \vec{b})| \leq |\vec{a} - \vec{b}|$, 则 $|\vec{c}|$ 的最大值为.

17. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} x^4 - 3x^2 - ax, & x > 0 \\ x^4 - 3x^2 + ax, & x < 0 \end{cases}$ 有四个零点, 则实数 a 的取值范围是.

三、解答题：本大题共 5 小题，共 74 分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

18. (本题满分 14 分) 已知函数 $f(x) = \sin \frac{x}{3} \cos \frac{x}{3} + \sqrt{3} \cos^2 \frac{x}{3}$.

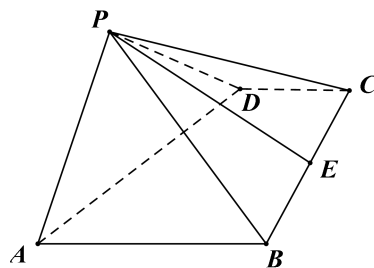
(I) 求函数 $f(x)$ 的最大值，并求 $f(x)$ 取最大值时 x 的取值集合；

(II) 若 $f(\frac{3}{2}\alpha) = \frac{3+2\sqrt{3}}{4}$ 且 $\alpha \in (0, \pi)$ ，求 $\cos \alpha$.

19. (本题满分 15 分) 如图，四棱锥 $P-ABCD$ 中， $\angle ABC = \angle BCD = 90^\circ$ ， $\triangle PAD$ 是以 AD 为底的等腰三角形， $AB = 2BC = 2CD = 4$ ， E 为 BC 中点，且 $PE = \sqrt{11}$.

(I) 求证：平面 $PAD \perp$ 平面 $ABCD$ ；

(II) 求直线 PE 与平面 PAB 所成角的正弦值.



20. (本题满分 15 分) 已知数列 $\{a_n\}$ 中， $a_1 = 2$ ，其前 n 项和 S_n 满足： $S_n = 2a_n + n - 3$.

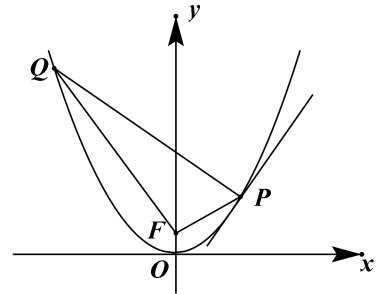
(I) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

(II) 令 $b_n = \frac{1}{a_n(a_n - 1)}$ ，数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 T_n ，证明：对于任意的 $n \in \mathbb{N}^*$ ，都有 $T_n < \frac{5}{6}$.

21. (本题满分 15 分) 已知抛物线 C 的顶点在原点, 焦点 $F(0,1)$.

(I) 求抛物线 C 的方程;

(II) P 是抛物线 C 上一点, 过点 P 的直线交 C 与另一点 Q , 满足 PQ 与 C 在点 P 处的切线垂直, 求 $\triangle PFQ$ 面积的最小值, 并求此时点 P 的坐标.



22. (本题满分 15 分) 已知函数 $f(x) = x^2(x-a)$, $x \in \mathbb{R}$, $-2 \leq a \leq 2$.

(I) 当 $a=1$ 时, 求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1, f(1))$ 处的切线方程;

(II) 设 $f'(x)$ 是 $f(x)$ 的导函数, 函数 $g(x) = \begin{cases} f'(x), & f(x) \geq f'(x) \\ f(x), & f(x) < f'(x) \end{cases}$, 求 $g(x)$ 在 $x \in [-2, 2]$ 时的最小值.