2018～2019学年东联现代中学高二上学期期末考试

数学试卷(文科)

考生注意:

1. 本试卷分选择题和非选择题两部分。满分150分,考试时间120分钟。
2. 答题前,考生务必用直径0.5毫米黑色墨水签字笔将密封线内项目填写清楚。
3. 考生作答时,请将答案答在答题卡上。选择题每小题选出答案后,用2B铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑;非选择题请用直径0.5毫米黑色墨水签字笔在答题卡上各题的答题区域内作答,**超出答题区域书写的答案无效,在试题卷、草稿纸上作答无效。**
4. 本卷命题范围:人教B版必修3,选修1-1。

一、选择题:本题共12小题,每小题5分,共60分。在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的。

1. 双曲线$\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$的渐近线方程是

A. $y=\pm\frac{9}{16}x$　　B. $y=\pm\frac{16}{9}x$

C. $y=\pm\frac{4}{3}x$　　D. $y=\pm\frac{3}{4}x$

2. 命题“若$a=0$,则$ab=0$”与其逆命题、否命题、逆否命题这四个命题中,真命题的是

A. 原命题、否命题　　B. 原命题、逆命题

C. 原命题、逆否命题　　D. 逆命题、否命题

3. 某单位有职工75人,其中青年职工35人,中年职工25人,老年职工15人,为了了解该单位职工对“木桶理论”的理解情况,决定用分层抽样的方法从中抽取一个样本,若样本中的青年职工为7人,则样本中的中年职工为

A. 3人　　B. 5人　　C. 7人　　D. 8人

4. 若抛物线$x=ay^2(a\neq0)$的准线方程为$x=2$,则a的值为

A. $-\frac{1}{8}$　　B. $\frac{1}{8}$　　C. 8　　D. -8

5. 设P为双曲线$\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{12}=1$上一点,$F_1$,$F_2$分别为左、右焦点,若$|PF_1|=7$,则$|PF_2|=$

A. 1　　B. 11

C. 3或11　　D. 1或15

6. 函数$f(x)=\sin x-x$在区间$[0,1]$上的最小值为

A. 0　　B. $\sin 1$　　C. 1　　D. $\sin 1-1$

7. 已知函数 $f(x)=x+\ln x$，则曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线方程为

A. $x+2y-1=0$　　B. $2x-y+1=0$

C. $x-2y-1=0$　　D. $2x-y-1=0$

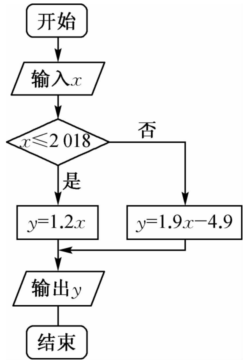
8. 若执行如图所示的程序框图，当输入 x 的值为 10 时，输出 y 的值是

A. 14.1

B. 12

C. 15.1

D. 23.9



9. 若双曲线的一个焦点为 $(\sqrt{6},0)$，一条渐近线方程为 $y=\sqrt{2}x$，则该双曲线的方程是

A. $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{2}=1$　　B. $\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{4}=1$

C. $\frac{y^2}{8}-\frac{x^2}{4}=1$　　D. $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{8}=1$

10. 若 P 为抛物线 $x^2=-4y$ 上一点，$A(1,0)$，则 P 到此抛物线的准线的距离与 P 到点 A 的距离之和的最小值为

A. $\sqrt{2}$　　B. $\frac{\sqrt{2}}{2}$　　C. $\frac{\sqrt{5}}{2}$　　D. $\frac{1}{2}$

11. 设 F 是双曲线 $C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的一个焦点，若 C 上存在点 P，使线段 PF 的中点为 $(0,3b)$，则 C 的离心率为

A. $\sqrt{7}$　　B. $\sqrt{17}$　　C. 6　　D. $\sqrt{37}$

12. 已知定义在 $(0,+\infty)$ 上的函数 $f(x)$ 的导函数 $f'(x)$ 满足 $xf'(x)<2x^2-1$，且 $f(1)=4$，$f(\mathrm{e})=\mathrm{e}^2-\mathrm{e}+2$，则不等式 $f(x)<x^2+3-\ln x$ 的解集为

A. $(0,1)$　　B. $(1,+\infty)$　　C. $(0,\mathrm{e})$　　D. $(\mathrm{e},+\infty)$

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13.《少年中国说》是清朝末年梁启超所作的散文，写于戊戌变法失败后的 1900 年，文中极力歌颂少年的朝气蓬勃，其中“少年智则国智，少年富则国富；少年强则国强，少年独立则国独立”等优秀文句激励一代又一代国人强身健体、积极竞技. 2018 年，甲、乙、丙、丁四人参加运动会射击项目选拔赛，四人的平均成绩和方差如下表：

	甲	乙	丙	丁
平均环数 $\bar{x}$	8.5	8.8	8.8	8
方差 s^2	3.5	3.5	2.1	8.5

则参加运动会的最佳人选应为__________.

14. 若“$\exists x\in[1,2]$，$x^2-a>0$”为真命题，则实数 a 的取值范围是__________.

15. 已知定点 $A(-2,0)$，$B(2,0)$，动点 P 满足 $|PA|-|PB|=2$，则动点 P 的轨迹方程为________.

16. 椭圆 $C:\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$ 的两个焦点分别为 F_1，F_2，椭圆 C 上的一点 P 满足 $\angle F_1PF_2=60^\circ$，O 为坐标原点，则 $\triangle POF_2$ 的面积为________.

三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17.（本小题满分 10 分）

已知某电子设备的使用年限 x(年)和所支出的维修费用 y(万元)有如下统计数据：

x	2	3	4	5	6
y	2.2	3.8	5.5	6.5	7.0

分析知 y 与 x 呈线性相关关系.

(1)求 y 关于 x 的线性回归方程；

(2)若使用年限为 20 年，则维修费用约为多少？

注：$\hat{b}=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})}{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2}$，$\hat{a}=\overline{y}-\hat{b}\,\overline{x}$.

18.（本小题满分 12 分）

已知 p：方程 $x^2+(2m-m^2)y^2=1(m\in\mathbf{R})$表示的曲线为椭圆，$q$：函数 $f(x)=\dfrac{1}{3}x^3-\dfrac{1}{2}x^2+(m+3)x(m\in\mathbf{R})$在 $\mathbf{R}$ 上有两个不同的极值点.

(1)若 p 是真命题，求实数 m 的取值范围；

(2)若“$p\vee q$”是真命题，“$p\wedge q$”是假命题，求实数 m 的取值范围.

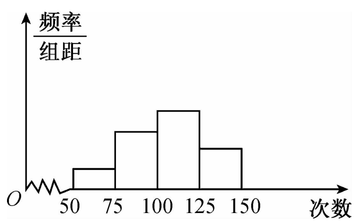
19.（本小题满分 12 分）

今天的学校教育非常关注学生身体健康成长，某地安顺小学的教育行政主管部门为了了解小学生的体能情况，抽取该校二年级的部分学生进行两分钟跳绳次数测试，测试成绩分成[50,75)，[75,100)，[100,125)，[125,150]四个部分，并画出频率分布直方图如图所示，图中从左到右前三个小组的频率分别为 0.1，0.3，0.4，且第一小组(从左向右)的人数为 5(人).

(1)求第四小组的频率；

(2)求该校二年级参加两分钟跳绳测试的学生人数；

(3)若两分钟跳绳次数不低于 100 次的学生体能为达标，试估计该校二年级学生体能的达标率.



20.（本小题满分 12 分）

2018 年，世界政治风云存在着诸多变数，中东成为世界的焦点. 现有 8 名维和军人，其中维和军人 A_1，A_2，A_3 通晓英语，B_1，B_2，B_3 通晓俄语，C_1、C_2 通晓汉语，2018 年 10 月 1 日，国际社会从这 8 名维和军人中选出通晓英语、俄语和汉语的维和军人各 1 名，组成一个中东战地维和领导小组.

（1）求 A_2 被选中的概率；

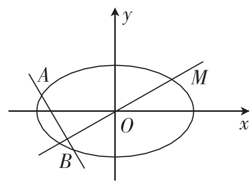
（2）求 B_1 和 C_1 至少有一个人被选中的概率.

21.（本小题满分 12 分）

如图，点 $M(\sqrt{3},\sqrt{2})$ 在椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 上，且点 M 到两焦点的距离之和为 6.

（1）求椭圆的方程；

（2）设与 MO（O 为坐标原点）垂直的直线交椭圆于 A，B（A，B 不重合），求 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}$ 的取值范围.



22.（本小题满分 12 分）

已知函数 $f(x)=a\ln x-x^2+\dfrac{1}{2}a(a\in\mathbf{R})$.

（1）讨论 $f(x)$ 的单调性；

（2）若 $f(x)\leqslant 0$，求 a 的取值范围.

2018～2019 学年东联现代中学高二上学期期末考试·数学试卷(文科)

参考答案、提示及评分细则

1. C　双曲线$\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$的渐近线方程为$\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=0$,即 $y=\pm\frac{4}{3}x$.

2. C　∵原命题为真,∴逆否命题为真. 故选 C.

3. B　设样本中的中年职工为 m 人,则$\frac{7}{35}=\frac{m}{25}$,解得 $m=5$ 人.

4. A　$x=ay^2$ 可化为 $y^2=\frac{1}{a}x$,则$-\frac{1}{4a}=2$ 即 $a=-\frac{1}{8}$.

5. C　∵$||PF_1|-|PF_2||=2a=4$,且$|PF_1|=7$,∴$|PF_2|=3$ 或 11,符合$|PF_2|\geqslant c-a=4-2>2$,故$|PF_2|=3$ 或 11.

6. D　∵$f'(x)=\cos x-1\leqslant 0$,∴$f(x)=\sin x-x$ 在区间$[0,1]$上单调递减,∴$f(x)_{\min}=f(1)=\sin 1-1$.

7. D　$f'(x)=1+\frac{1}{x}$,切线的斜率 $k=f'(1)=1+1=2$,$f(1)=1$,故切点为$(1,1)$,切线的点斜式方程为 $y-1=2(x-1)$,即 $2x-y-1=0$. 故选 D.

8. B　据题设分析知,输出 y 的值是 12.

9. B　由题意设双曲线的标准方程为$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$,焦距为 $2c(c>0)$,则 $c=\sqrt{6}$,$\frac{b}{a}=\sqrt{2}$,解得 $a^2=2$,$b^2=4$,所以双曲线方程为$\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{4}=1$. 故选 B.

10. A　∵P 到准线的距离 d 等于 P 到焦点 F 的距离,$F(0,-1)$,∴$d+|PA|=|PF|+|PA|\geqslant|AF|=\sqrt{2}$.

11. D　由已知,令 $F(-c,0)$,故 $P(c,6b)$. 又 P 在双曲线 C 上,代入 C 的方程得$\frac{c^2}{a^2}-36=1$,即 $e=\frac{c}{a}=\sqrt{37}$.

12. B　设 $F(x)=f(x)-x^2-3+\ln x,x>0$,

则 $F'(x)=f'(x)-2x+\frac{1}{x}=\frac{xf'(x)-2x^2+1}{x}$,

∵$xf'(x)<2x^2-1$,∴$xf'(x)-2x^2+1<0$,∴$F'(x)<0$,

∴$F(x)$在$(0,+\infty)$上单调递减.

又 $F(1)=0$,∴$F(x)<0$ 的解集为$(1,+\infty)$,即 $f(x)<x^2+3-\ln x$ 的解集为$(1,+\infty)$.

13. 丙　从表格中可以看出乙和丙的平均成绩优于甲和丁的平均成绩,但丙成绩发挥得最稳定,故最佳人选应为丙.

14. $(-\infty,4)$　当 $x\in[1,2]$时,$1\leqslant x^2\leqslant 4$. 又∵“$\exists x\in[1,2],x^2-a>0$”为真命题,∴$\exists x\in[1,2]$使 $a<x^2$ 成立,∴$a<4$.

15. $x^2-\frac{y^2}{3}=1(x\geqslant 1)$　结合双曲线定义可知，动点 P 的轨迹为焦点在 x 轴上的双曲线的右支，$a=1$，$c=2$，所以 $b=\sqrt{3}$，动点 P 的轨迹方程为 $x^2-\frac{y^2}{3}=1(x\geqslant 1)$.

16. $\frac{\sqrt{3}}{2}$　由题意知 $|PF_1|+|PF_2|=4$，故 $|PF_1|^2+|PF_2|^2+2|PF_1|\cdot|PF_2|=16$，又在 $\triangle PF_1F_2$ 中，$|F_1F_2|=2c=2$，由余弦定理得 $|PF_1|^2+|PF_2|^2-2|PF_1|\cdot|PF_2|\cos 60^\circ=4$，

从而 $3|PF_1|\cdot|PF_2|=12$，$|PF_1|\cdot|PF_2|=4$，$\triangle F_1PF_2$ 的面积为 $\frac{1}{2}|PF_1||PF_2|\sin 60^\circ=\sqrt{3}$，则 $\triangle POF_2$ 的面积为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

17. 解：(1) $\bar{x}=\frac{2+3+4+5+6}{5}=4$，…… 1 分

$\bar{y}=\frac{2.2+3.8+5.5+6.5+7.0}{5}=5$，…… 3 分

$$\hat{b}=\frac{(2-4)\cdot(2.2-5)+(3-4)\cdot(3.8-5)+(4-4)\cdot(5.5-5)+(5-4)\cdot(6.5-5)+(6-4)\cdot(7-5)}{(2-4)^2+(3-4)^2+(4-4)^2+(5-4)^2+(6-4)^2}$$

$=1.23$，…… 6 分

$\hat{a}=\bar{y}-\hat{b}\bar{x}=5-1.23\times 4=0.08$，…… 7 分

所以所求线性回归直线方程为 $\hat{y}=1.23x+0.08$. …… 8 分

(2) 当 $x=20$ 时，$\hat{y}=1.23\times 20+0.08=24.68$(万元)，估计当使用 20 年时的维修费用为24.68万元.

…… 10 分

18. 解：(1) 由题意知 $2m-m^2>0$，且 $2m-m^2\neq 1$.

解得 $0<m<1$ 或 $1<m<2$，即实数 m 的取值范围为 $(0,1)\cup(1,2)$. …… 2 分

(2) 由函数 $f(x)=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2+(m+3)x$ 在 $\mathbf{R}$ 上有两个不同的极值点，

可知 $f'(x)=x^2-x+(m+3)=0$ 有两个不同的根.

故 $1-4(m+3)>0$，解得 $m<-\frac{11}{4}$. …… 4 分

因为“$p\vee q$”是真命题，“$p\wedge q$”是假命题，

所以“p 真 q 假”或“p 假 q 真”. …… 6 分

当 p 真 q 假时，

$$\begin{cases}0<m<1 \text{ 或 } 1<m<2,\\ m\geqslant -\frac{11}{4},\end{cases}$$

解得 $0<m<1$ 或 $1<m<2$. ………… 8 分

当 p 假 q 真时，

$$\begin{cases} m\leqslant 0 \text{ 或 } m\geqslant 2 \text{ 或 } m=1, \\ m<-\dfrac{11}{4}, \end{cases}$$

解得 $m<-\dfrac{11}{4}$. ………… 10 分

故实数 m 的取值范围是 $\left\{m \,\middle|\, 0<m<1 \text{ 或 } 1<m<2 \text{ 或 } m<-\dfrac{11}{4}\right\}$. ………… 12 分

19. 解：(1)第四小组的频率为 $1-0.1-0.3-0.4=0.2$. ………… 3 分

(2)设该校二年级参加两分钟跳绳测试的学生有 x 人，则 $0.1x=5$，………… 6 分

解得 $x=50$，故该校二年级参加两分钟跳绳测试的学生有 50 人. ………… 8 分

(3)由题意及频率分布直方图知，样本数据参加两分钟跳绳次数测试体能达标率为 $0.4+0.2=0.6$，

所以可估计该校二年级学生体能达标率为 60%. ………… 12 分

20. 解：(1)从 8 人中选出通晓英语、俄语和汉语维和军人各 1 名的可能结果为 (A_1,B_1,C_1)，(A_1,B_1,C_2)，(A_1,B_2,C_1)，(A_1,B_2,C_2)，(A_1,B_3,C_1)，(A_1,B_3,C_2)，(A_2,B_1,C_1)，(A_2,B_1,C_2)，(A_2,B_2,C_1)，(A_2,B_2,C_2)，(A_2,B_3,C_1)，(A_2,B_3,C_2)，(A_3,B_1,C_1)，(A_3,B_1,C_2)，(A_3,B_2,C_1)，(A_3,B_2,C_2)，(A_3,B_3,C_1)，(A_3,B_3,C_2)，共 18 种情况. ………… 4 分

用 M 表示事件"A_2 被选中"，则 $P(M)=\dfrac{6}{18}=\dfrac{1}{3}$. ………… 6 分

(2)用 N 表示事件"B_1 和 C_1 至少有 1 个人被选中".

据(1)求解知，B_1 和 C_1 至少有 1 个人被选中有 12 种情况，………… 9 分

所以 B_1 和 C_1 至少有 1 个人被选中的概率 $P(N)=\dfrac{12}{18}=\dfrac{2}{3}$. ………… 12 分

21. 解：(1)$\because 2a=6$，$\therefore a=3$. ………… 1 分

又点 $M(\sqrt{3},\sqrt{2})$在椭圆上，$\therefore \dfrac{3}{9}+\dfrac{2}{b^2}=1$.

解得：$b^2=3$，$\therefore$所求椭圆方程为$\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{3}=1$. ………… 4 分

(2)$\because k_{MO}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$，$\therefore k_{AB}=-\dfrac{\sqrt{6}}{2}$. 设直线 AB 的方程：$y=-\dfrac{\sqrt{6}}{2}x+m$，

联立方程组$\begin{cases} \dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{3}=1, \\ y=-\dfrac{\sqrt{6}}{2}x+m, \end{cases}$ 消去 y 得：$11x^2-6\sqrt{6}mx+6m^2-18=0$. ………… 7 分

$\Delta=(6\sqrt{6}m)^2-4\times 11(6m^2-18)>0$，$\therefore m^2<\dfrac{33}{2}$.

设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，$x_1+x_2=\dfrac{6\sqrt{6}m}{11}$，$x_1x_2=\dfrac{6m^2-18}{11}$. …………………………………………… 9 分

则 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=x_1x_2+y_1y_2=\dfrac{5}{2}x_1x_2-\dfrac{\sqrt{6}m}{2}(x_1+x_2)+m^2=\dfrac{8m^2-45}{11}$. ………………………… 11 分

$\because 0\leqslant m^2<\dfrac{33}{2}$，$\therefore \overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}$ 的取值范围为 $\left[-\dfrac{45}{11},\dfrac{87}{11}\right)$. ……………………………………… 12 分

22. 解：(1) $f'(x)=\dfrac{a}{x}-2x=\dfrac{a-2x^2}{x}$，…………………………………………………………………… 1 分

当 $a\leqslant 0$ 时，$f'(x)<0$，则 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上递减；…………………………………………………… 3 分

当 $a>0$ 时，令 $f'(x)=0$ 得 $x=\sqrt{\dfrac{a}{2}}$（负根舍去）. …………………………………………………… 4 分

令 $f'(x)>0$ 得 $0<x<\sqrt{\dfrac{a}{2}}$；令 $f'(x)<0$ 得 $x>\sqrt{\dfrac{a}{2}}$，

$\therefore f(x)$ 在 $\left(0,\sqrt{\dfrac{a}{2}}\right)$ 上递增，在 $\left(\sqrt{\dfrac{a}{2}},+\infty\right)$ 上递减. ………………………………………………… 6 分

(2) 当 $a=0$ 时，$f(x)=-x^2<0$，符合题意. …………………………………………………………………… 7 分

当 $a>0$ 时，$f(x)_{\max}=f\left(\sqrt{\dfrac{a}{2}}\right)=a\ln\sqrt{\dfrac{a}{2}}-\dfrac{a}{2}+\dfrac{a}{2}=a\ln\sqrt{\dfrac{a}{2}}\leqslant 0$，$\because a>0$，$\therefore \ln\sqrt{\dfrac{a}{2}}\leqslant 0$，

$\therefore 0<\sqrt{\dfrac{a}{2}}\leqslant 1$，$\therefore 0<a\leqslant 2$. ……………………………………………………………………… 9 分

当 $a<0$ 时，$f(x)=a\ln x-x^2+\dfrac{1}{2}a$ 在 $(0,+\infty)$ 上递减，

且 $y=a\ln x$ 与 $y=x^2-\dfrac{1}{2}a$ 的图象在 $(0,+\infty)$ 上只有一个交点，设此交点为 (x_0,y_0)，

则当 $x\in(0,x_0)$ 时，$f(x)>0$，故当 $a<0$ 时，不满足 $f(x)\leqslant 0$. ……………………………………… 11 分

综上，a 的取值范围为 $[0,2]$. ………………………………………………………………………………… 12 分