2017-2018 学年汕头市金山中学高三文科数学期中考试

命题人：郑少珊

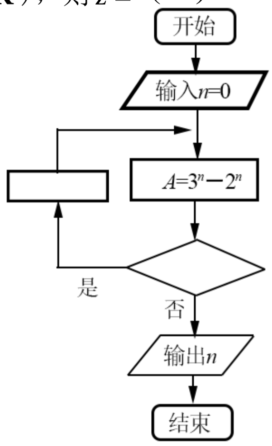
一、选择题.

1．已知集合$\{x|x^2+ax=0\}=\{0,1\}$，则实数 a 的值为（　）

A. -1　　B. 0　　C. 1　　D. 2

2．已知复数 $z=\dfrac{1+ai}{3-i^{2017}}$ 是纯虚数(其中 i 为虚数单位，$a\in\mathbf{R}$)，则 $z=$（　）

A. 1　　B. -1　　C. i　　D. $-$i



3．如图是为了求出满足 $3^n-2^n>1000$ 的最小偶数 n，那么在◇和▭两个空白框中，可以分别填入(　　)

A. $A>1000$ 和 $n=n+1$　　B. $A>1000$ 和 $n=n+2$

C. $A\le1000$ 和 $n=n+1$　　D. $A\le1000$ 和 $n=n+2$

4．若 $a=\log_{\frac{1}{\pi}}\dfrac{1}{3}$，$b=e^{\frac{\pi}{3}}$，$c=\log_3\cos\dfrac{1}{5}\pi$，则（　）

A. $b>c>a$　　B. $b>a>c$　　C. $a>b>c$　　D. $c>a>b$

5．每年三月为学雷锋活动月，某班有青年志愿者男生 3 人，女生 2 人，现需选出 2 名青年志愿者到社区做公益宣传活动，则选出的 2 名志愿者性别相同的概率为（　）

A. $\dfrac{3}{5}$　　B. $\dfrac{2}{5}$　　C. $\dfrac{1}{5}$　　D. $\dfrac{3}{10}$

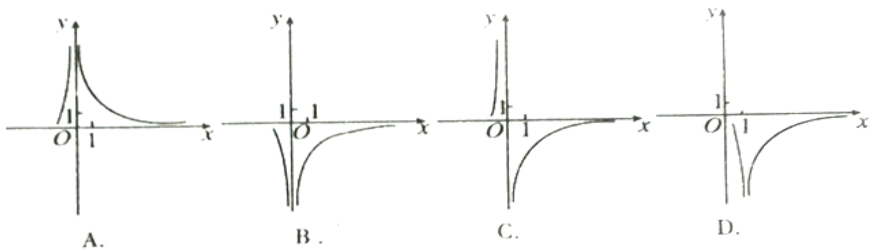
6．已知 a, b, c 分别为 ΔABC 的三个内角 A, B, C 的对边，$(a+b)(\sin A-\sin B)=(c-b)\sin C$，则$\angle A=$（）

A. $\dfrac{\pi}{6}$　　B. $\dfrac{\pi}{4}$　　C. $\dfrac{\pi}{3}$　　D. $\dfrac{2\pi}{3}$

7．设 $p:\dfrac{2x-1}{x-1}\le0, q:x^2-(2a+1)x+a(a+1)<0$，若 p 是 q 的充分不必要条件，则实数 a 的取值范围是（　）

A. $\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$　　B. $\left[0,\dfrac{1}{2}\right)$　　C. $\left(0,\dfrac{1}{2}\right]$　　D. $\left[\dfrac{1}{2},1\right)$

8．已知函数 $f(x)=\dfrac{1}{\ln(x+1)-x}$，则 $y=f(x)$ 的图象大致为（　）

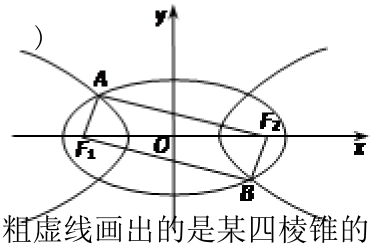


9．已知函数 $y=\sin(2x+\varphi)$ 在 $x=\dfrac{\pi}{6}$ 处取得最大值, 则函数 $y=\cos(2x+\varphi)$ 的图象（　　）

A. 关于点 $\left(\dfrac{\pi}{6},0\right)$ 对称　　B. 关于点 $\left(\dfrac{\pi}{3},0\right)$ 对称

C. 关于直线 $x=\dfrac{\pi}{6}$ 对称　　D. 关于直线 $x=\dfrac{\pi}{3}$ 对称

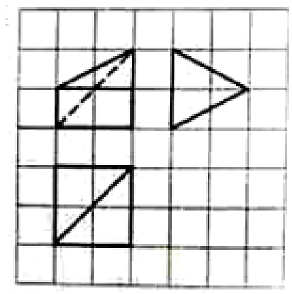
10．如图，F_1,F_2 是椭圆 $C_1:\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$ 与双曲线 C_2 的公共焦点，A,B 分别是 C_1,C_2 在第二、四象限的公共点. 若四边形为矩形，则 C_2 的离心率是（　　）



A. $\sqrt{2}$　　B. $\sqrt{3}$　　C.　　D.

11．如图，网格纸上小正方形的边长为 1，粗实线及粗虚线画出的是某四棱锥的三视图，则该四棱锥各个侧面中，最大的侧面面积为（　　）

A. 2　　B. $\sqrt{5}$　　C. 3　　D. 4



12. 已知实数 $f(x)=\begin{cases} e^x, x\ge 0 \\ lg(-x), x<0 \end{cases}$ 若关于 x 的方程 $f^2(x)+f(x)+t=0$ 有三个不同的实根, 则 t 的取值范围为（　　）

A. $(-\infty,-2]$　　B. $[1,+\infty)$　　C. $[-2,1]$　　D. $(-\infty,-2]\cup[1,+\infty)$

二、填空题.

13．若数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n 满足 $S_n=\dfrac{2}{3}a_n+\dfrac{1}{3}$（　　），则数列 $\{a_n\}$ 的通项公式是

_____.

14.在△ABC 中,内角 A,B,C 所对的边分别为 a,b,c.已知 $\tan\left(\frac{\pi}{4}+A\right)=2$,则$\frac{\sin 2A}{\sin 2A+\cos^2 A}=$________.

15. 设O 为坐标原点,$A(2,1)$,若点$B(x,y)$满足,则 的最大值是________.

16. 已知 A, B 是球 O 的球面上两点， $\angle AOB=60°$， C 为该球面上的动点，若三棱锥 $O-ABC$ 体积的最大值为$18\sqrt{3}$，则球 O 的体积为_________.

三、解答题.

17. 已知数列$\{a_n\}$是等比数列，$a_2=4$，a_3+2 是 a_2 和 a_4 的等差中项.

(1)求数列$\{a_n\}$的通项公式;

(2)设 $b_n=2\log_2 a_n-1$，求数列$\{a_nb_n\}$的前 n 项和 T_n.

18.“共享单车”的出现，为我们提供了一种新型的交通方式．某机构为了调查人们对此种交通方式的满意度，从交通拥堵不严重的A 城市和交通拥堵严重的B 城市分别随机调查了 20 个用户，得到了一个用户满意度评分的样本，并绘制出茎叶图（如图所示）：

A城市		B城市
6 8	4	
1 3 6 4	5	3
2 4 5 5	6	6 4 2
3 3 4 6 9	7	6 8 8 6 4 3
3 2 1	8	9 2 8 6 5 1
1 3	9	7 5 5 2

若得分不低于 80 分，则认为该用户对此种交通方式“认可”，否则认为该用户对此种交通方式“不认可”，请根据此样本完成此2×2 列联表，并据此样本分析是否有的把握认为城市拥堵与认可共享单车有关：

	A	B	合计
认可			
不认可			
合计			

附：参考数据：（参考公式：

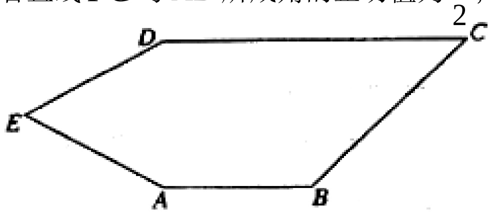
）

	0. 150	0. 100	0. 050	0. 025	0. 010	0. 005	0. 001
k_0	2. 072	2. 706	3. 841	5. 024	6. 635	7. 879	10. 828

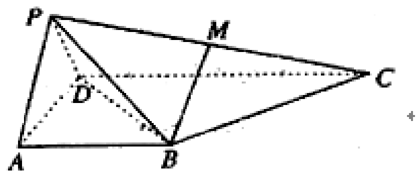
19．如图（1），五边形 $ABCDE$ 中， $ED=EA, AB//CD, CD=2AB, \angle EDC=150^0$. 如图（2），将 ΔEAD 沿 AD 折到 ΔPAD 的位置，得到四棱锥 $P-ABCD$. 点 M 为线段 PC 的中点，且 $BM\perp$ 平面 PCD.

（1）求证：平面 $PAD\perp$ 平面 PCD；

（2）若直线 PC 与 AB 所成角的正切值为 $\frac{1}{2}$, 设 $AB=1$, 求四棱锥 $P-ABCD$ 的体积.



图（1）



图（2）

20．已知椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 经过点 $P\left(1,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$，离心率 $e=\frac{\sqrt{3}}{2}$。

（Ⅰ）求椭圆 C 的标准方程；

（Ⅱ）设过点 $E(0,-2)$ 的直线 l 与椭圆 C 相交于 P、Q 两点, 求 ΔOPQ 的面积的最大值。

21.（本小题满分 12 分）已知函数 $f(x)=\frac{a\ln x}{x}+b(a,b\in R)$ 的图象在点 $(1,f(1))$ 处的切线方程为 $y=x-1$.

（Ⅰ）求实数 a,b 的值及函数 $f(x)$ 的单调区间；

（Ⅱ）当 $f(x_1)=f(x_2)(x_1\neq x_2)$ 时，比较 x_1+x_2 与 $2e$（e 为自然对数的底数）的大小.

22．选修 4—4：坐标系与参数方程

已知直线 l 经过点 $P\left(\frac{1}{2},1\right)$，倾斜角 $\alpha=\frac{\pi}{6}$，圆 C 的极坐标方程为 $\rho=\sqrt{2}\cos\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)$.

（Ⅰ）写出直线 l 的参数方程，并把圆 C 的方程化为直角坐标方程；

（Ⅱ）设 l 与圆 C 相交于 A,B 两点，求点 P 到 A,B 两点的距离之积.

23．选修 4—5：不等式选讲.

设函数 $f(x)=|x+2|-|x-1|$.

(1)求不等式 $f(x)>1$ 的解集；

(2)若关于 x 的不等式 $f(x)+4\geq|1-2m|$ 有解，求实数 m 的取值范围.

2017-2018 学年度 汕头市金山中学 高三文科数学 期中考试 参考答案

ACDBB CBBAD CA $\frac{2}{5}$ 288π

17. [解] (1)设数列$\{a_n\}$的公比为 q，

因为 $a_2=4$，所以 $a_3=4q$，$a_4=4q^2$.2 分

因为 a_3+2 是 a_2 和 a_4 的等差中项，所以 $2(a_3+2)=a_2+a_4$.

即 $2(4q+2)=4+4q^2$，化简得 $q^2-2q=0$.

因为公比 $q\neq 0$，所以 $q=2$.

所以 $a_n=a_2q^{n-2}=4\times 2^{n-2}=2^n(n\in\mathbf{N}^*)$.5 分

(2)因为 $a_n=2^n$，所以 $b_n=2\log_2 a_n-1=2n-1$，

所以 $a_nb_n=(2n-1)2^n$，7 分

则 $T_n=1\times 2+3\times 2^2+5\times 2^3+\cdots+(2n-3)2^{n-1}+(2n-1)2^n$，①

$2T_n=1\times 2^2+3\times 2^3+5\times 2^4+\cdots+(2n-3)2^n+(2n-1)2^{n+1}$.②

由①－②得，$-T_n=2+2\times 2^2+2\times 2^3+\cdots+2\times 2^n-(2n-1)2^{n+1}$

$=2+2\times\frac{4(1-2n-1}{1-2}-(2n-1)2^{n+1}$

$=-6-(2n-3)2^{n+1}$，

所以 $T_n=6+(2n-3)2^{n+1}$. 12 分

18. 解析：

【答案】没有的把握认为城市拥堵与认可共享单车有关.

			合计
认可	5	10	15
不认可	15	10	25
合计	20	20	40

所以没有的把握认为城市拥堵与认可共享单车有关.

19.（1）证明：取 PD 的中点 N，连接 AN,MN，则 $MN//CD,MN=\frac{1}{2}CD$，

又 $AB//CD,AB=\frac{1}{2}CD$，所以 $MN//AB,MN=AB$，

则四边形 $ABMN$ 为平行四边形，所以 $AN//BM$，

又 $BM\perp$平面 PCD，

$\therefore AN\perp$ 平面 PCD，

$AN \subseteq$ 面PCD

∴平面 $PAD \perp$ 平面 PCD;

（2）取 AD 的中点 O，连接 PO， 因为 $AN \perp$ 平面 PCD，

∴ $AN \perp PD, AN \perp CD$.

由 $ED = EA$ 即 $PD = PA$ 及 N 为 PD 的中点，可得 ΔPAD 为等边三角形，

∴ $\angle PDA = 60^0$，

又 $\angle EDC = 150^0$，∴ $\angle CDA = 90^0$，∴ $CD \perp AD$，

∴ $CD \perp$ 平面 $PAD, CD \subset$ 平面 $ABCD$，

∴平面 $PAD \perp$ 平面 $ABCD$.

$PO \perp AD =$ 面$PAD \cap$ 面$ABCD$

$PO \subset$ 面PAD

所以 $PO \perp$ 面$ABCD$

所以 PO是锥$P-ABCD$的高.

$AB // CD$，∴ $\angle PCD$ 为直线 PC 与 AB 所成的角，

由（1）可得 $\angle PDC = 90^0$，∴ $\tan\angle PCD = \dfrac{PD}{CD} = \dfrac{1}{2}$，∴ $CD = 2PD$，则 .其他方法酌情给分

20．解析：

（Ⅰ）由点 $P\left(1, \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ 在椭圆上得， $\dfrac{1}{a^2} + \dfrac{3}{4b^2} = 1$ ① 又 $e = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, 所以 $\dfrac{c}{a} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ ②

由①②得 $c^2 = 3, a^2 = 4, b^2 = 1$， 故椭圆 C 的标准方程为 $\dfrac{x^2}{4} + y^2 = 1$

（II）当 $l \perp x$轴时不合题意，故设 $l: y = kx - 2, P(x_1, y_1), Q(x_2, y_2)$.

将 $y = kx - 2$ 代入 $\dfrac{x^2}{4} + y^2 = 1$ 得 $(4k^2 + 1)x^2 - 16kx + 12 = 0$.

$S_{\Delta OPQ} = \dfrac{1}{2} d \cdot |PQ| = \dfrac{4\sqrt{4k^2 - 3}}{4k^2 + 1}$.

设 $\sqrt{4k^2 - 3} = t$, 则 $t > 0$, $S_{\Delta OPQ} = \dfrac{4t}{t^2 + 4} = \dfrac{4}{t + \dfrac{4}{t}}$.

因为 $t + \dfrac{4}{t} \geq 4$, 当且仅当 $t = 2$，即 $k = \pm\dfrac{\sqrt{7}}{2}$ 时等号成立，且满足 $\Delta > 0$.

ΔOPQ 的面积最大值为1

21. 解：（Ⅰ）函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$，

$f'(x)=\dfrac{a(1-\ln x)}{x^2}$，

因为 $f(x)$ 的图象在点 $(1,f(1))$ 处的切线方程为 $y=x-1$，

所以 $\begin{cases} f'(1)=a=1, \\ f(1)=\dfrac{a\ln 1}{1}+b=0, \end{cases}$，解得 $a=1$，$b=0$.

所以 $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$.

所以 $f'(x)=\dfrac{1-\ln x}{x^2}$.

令 $f'(x)=0$，得 $x=e$，

当 $0<x<e$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增；

当 $x>e$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减.

所以函数 $f(x)$ 的单调递增区间为 $(0,e)$，单调递减区间为 $(e,+\infty)$.

（Ⅱ）当 $f(x_1)=f(x_2)(x_1\neq x_2)$ 时，$x_1+x_2>2e$.

证明如下：

因为 $x>e$ 时 $f(x)$ 单调递减，

且 $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}>0$，

又 $f(1)=0$，当 $1<x<e$ 时，$f(x)$ 单调递增，且 $f(x)>0$.

若 $f(x_1)=f(x_2)(x_1\neq x_2)$，则 x_1,x_2 必都大于 1，且必有一个小于 e，一个大于 e.

不防设 $1<x_1<e<x_2$，

当 $x_2\geq 2e$ 时，必有 $x_1+x_2>2e$.

当 $e<x_2<2e$ 时，$f(x_1)-f(2e-x_2)=f(x_2)-f(2e-x_2)=\dfrac{\ln x_2}{x_2}-\dfrac{\ln(2e-x_2)}{2e-x_2}$，

设 $g(x)=\dfrac{\ln x}{x}-\dfrac{\ln(2e-x)}{2e-x}$，$e<x<2e$，

则 $g'(x)=\dfrac{1-\ln x}{x^2}-\dfrac{-1+\ln(2e-x)}{(2e-x)^2}$

$=\dfrac{4e(e-x)(1-\ln x)-x^2\ln(-x^2+2ex)+2x^2}{x^2(2e-x)^2}$

$=\dfrac{4e(e-x)(1-\ln x)+x^2\left\{2-\ln\left[-(x-e)^2+e^2\right]\right\}}{x^2(2e-x)^2}$.

因为 $e<x<2e$，

所以 $e^2-(x-e)^2\in(0,e^2)$.

故 $2-\ln\left[-(x-e)^2+e^2\right]>0$.

又 $4e(e-x)(1-\ln x)>0$，

所以 $g'(x)>0$.

所以 $f(x)$ 在区间 $(e,2e)$ 内单调递增.

所以 $g(x)>g(e)=\dfrac{1}{e}-\dfrac{1}{e}=0$.

所以 $f(x_1)>f(2e-x_2)$.

因为 $1<x_1<e$， $e<x_2<2e$， 所以 $0<2e-x_2<e$，

又因为 $f(x)$ 在区间 $(0,e)$ 内单调递增，所以 $x_1>2e-x_2$， 即 $x_1+x_2>2e$.

综上，当 $f(x_1)=f(x_2)(x_1\neq x_2)$ 时， $x_1+x_2>2e$.

22.（1） $\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+\left(y-\dfrac{1}{2}\right)^2=\dfrac{1}{2}$；（2） $\dfrac{1}{4}$.

解析：(1)直线 l 的参数方程为 $\begin{cases}x=\dfrac{1}{2}+t\cos\dfrac{\pi}{6}\\ y=1+t\sin\dfrac{\pi}{6}\end{cases}$,即 $\begin{cases}x=\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}t\\ y=1+\dfrac{1}{2}t\end{cases}$ (t 为参数)

由 $\rho=\sqrt{2}\cos\left(\theta-\dfrac{\pi}{4}\right)$,得 ρ＝cosθ＋sinθ，所以 ρ^2＝ρcosθ＋ρsinθ，

∵$\rho^2=x^2+y^2$，$\rho\cos\theta=x$，$\rho\sin\theta=y$，∴$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{2}$.

(2)把$\begin{cases}x=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}t\\ y=1+\frac{1}{2}t\end{cases}$代入$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{2}$.

得 $t^2+\frac{1}{2}t-\frac{1}{4}=0$，$|PA|\cdot|PB|=|t_1t_2|=\frac{1}{4}$.故点 P 到点 A、B 两点的距离之积为$\frac{1}{4}$.

考点：1.参数方程的应用；2.极坐标方程与直角坐标方程的转化.

23.解：(1)函数 $f(x)$可化为 $f(x)=\begin{matrix}2x+1，-2<x<1，\\ 3，x\geqslant 1，\end{matrix}$

当 $x\leqslant-2$ 时，$f(x)=-3<0$，不合题意；

当$-2<x<1$ 时，$f(x)=2x+1>1$，得 $x>0$，即 $0<x<1$；

当 $x\geqslant 1$ 时，$f(x)=3>1$，即 $x\geqslant 1$.

综上，不等式 $f(x)>1$ 的解集为$(0，+\infty)$.

(2)关于 x 的不等式 $f(x)+4\geqslant|1-2m|$有解等价于$(f(x)+4)_{max}\geqslant|1-2m|$，

由(1)可知 $f(x)_{max}=3$(也可由$|f(x)|=||x+2|-|x-1||\leqslant|(x+2)-(x-1)|=3$，得 $f(x)_{max}=3$)，

即$|1-2m|\leqslant 7$，解得$-3\leqslant m\leqslant 4$.

故实数 m 的取值范围为$[-3,4]$.