广东省汕头市金山中学2017—2018学年度第一学期高三期中考试

理科数学

1. 已知集合$A=\{-1,0,1,2,3\}$，$B=\{x|x^2<17,x\in N\}$，则$A\cap B$等于（　　）

A. $\{-1,0,1,2,3\}$　　B. $\{0,1,2,3,4\}$　　C. $\{1,2,3\}$　　D. $\{0,1,2,3\}$

2. 已知函数$f(x)=1-2\sin^2 3x$，则$y=f(x)$的图象相邻两条对称轴之间的距离是（　　）

A. $\frac{\pi}{12}$　　B. $\frac{\pi}{6}$　　C. $\frac{\pi}{3}$　　D. $\frac{2\pi}{3}$

3. 已知当$0<x\leqslant\frac{1}{2}$时，不等式$\log_a x<-2$恒成立，则实数a的取值范围是（　　）

A. $(\sqrt{2},2)$　　B. $(1,\sqrt{2})$　　C. $(\frac{\sqrt{2}}{2},1)$　　D. $(0,\frac{\sqrt{2}}{2})$

4. 已知p：$a<0$，q：$a^2>a$；则p是q的（　　）

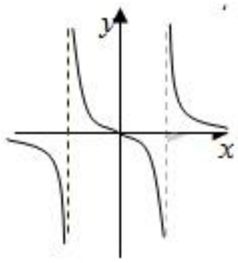
A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

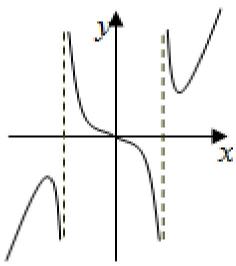
C. 充要条件　　D. 既不充分也不必要条件

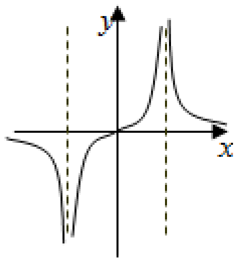
5. 已知函数$f(x)=x^2+(2a-1)x+b$是偶函数，那么函数$g(x)=\sqrt{\log_a x-1}$的定义域为（　　）

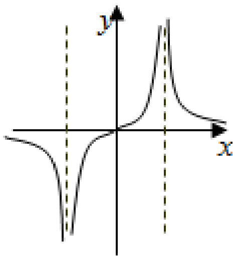
A. $(-\infty,\frac{1}{2}]$　　B. $(0,\frac{1}{2}]$　　C. $(0,2]$　　D. $[2,+\infty)$

6. 函数$y=\frac{x^3}{\sqrt[3]{x^4-1}}$的大致图象是（　　）

A. 

B. 

C. 

D. 

7. 已知函数$f(x)=\sin\omega x\cos\omega x(\omega>0)$，若存在实数$x_0$，使得对任意的实数$x$，都有$f(x_0)\leq f(x)\leq f(x_0+2016\pi)$恒成立，则$\omega$的最小值为（　　）

A. $\frac{1}{2016}$　　B. $\frac{1}{4032}$　　C. $\frac{1}{2016\pi}$　　D. $\frac{1}{4032\pi}$

8. 已知定义在 R 上的函数$f(x)$满足$f(2)=2$，且对任意的实数x，都有$f(x)\cdot f(x+5)=15$恒成立，则$f(2017)$的值为（　　）

A. 2　　B. $\frac{1}{2}$　　C. $\frac{2}{15}$　　D. $\frac{15}{2}$

9. 在 $\triangle ABC$中，$B=\frac{\pi}{4}$，BC 边上的高等于$\frac{1}{3}BC$, 则$\cos A=$（　　）

A. $-\frac{3\sqrt{10}}{10}$　　B. $-\frac{\sqrt{10}}{10}$　　C. $\frac{3\sqrt{10}}{10}$　　D. $\frac{\sqrt{10}}{10}$

10. 已知函数$f(x)=\cos 4x+\cos(4x-\frac{\pi}{3})$，将$f(x)$的图象所有点的横坐标伸长为原来的 2 倍，纵坐标不变，再将图像向右平移$\frac{\pi}{6}$个单位，得到函数$y=g(x)$的图像，则$y=g(x)$的一个单调递增区间是（　　）

A. $[\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}]$　　B. $[\frac{\pi}{6},\frac{2\pi}{3}]$　　C. $[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}]$　　D. $[-\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{6}]$

11. 定义在$(0,+\infty)$内的连续可导函数$f(x)$满足$f(x)>0$，且$2f(x)<xf'(x)<3f(x)$对$\forall x\in(0,+\infty)$恒成立，则（　　）

A. $\frac{1}{4}<\frac{f(1)}{f(2)}<\frac{1}{3}$　　B. $\frac{1}{3}<\frac{f(1)}{f(2)}<\frac{1}{2}$　　C. $\frac{1}{16}<\frac{f(1)}{f(2)}<\frac{1}{8}$　　D. $\frac{1}{8}<\frac{f(1)}{f(2)}<\frac{1}{4}$

12. 已知函数$f(x)=\begin{cases}\frac{2^x+2}{2},x\le 1\\ |\ln(x-1)|,x>1\end{cases}$，且函数$F(x)=f[f(x)]-af(x)-\frac{3}{2}$恰有 4 个零点，下列选项中哪个集合内的a值均符合题意（　　）

A. $a\in\left\{\frac{1}{4},\frac{\ln 2}{2},\frac{3}{5}\right\}$　　B. $a\in\left\{\frac{1}{4},\frac{\ln 2}{2},\frac{1}{2}\right\}$

C. $a\in\left\{\frac{1}{4},\frac{1}{2},\frac{3}{5}\right\}$　　D. $a\in\left\{\frac{\ln 2}{2},\frac{1}{2},\frac{3}{5}\right\}$

13. 若$\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha+\frac{1}{2}\cos\alpha=\frac{4}{5}$，则$\sin(\alpha+\frac{7\pi}{6})$的值是__________.

14. 已知点$A(1,0)$，$B(0,-1)$，$P(\cos\theta,\sin\theta)$，且$\theta\in[0,\pi]$，则$\overrightarrow{BP}\cdot\overrightarrow{BA}$的取值范围是____________.

15. 定义在R上的奇函数$f(x)$满足$f(-2+x)=f(2+x)$，当$x\in(0,2)$时，$f(x)=\ln(2x^2-3x+2)$则$f(x)$在区间$[0,6]$上的零点个数是__________.

16. 已知函数$f(x)=3xe^x+a$，如果存在唯一的$x_0\in Z$，使得$f(x_0)<ax_0$成立，则实数 a 的取值

范围是_________.

17. 在ΔABC中，角A,B,C的对边分别为a,b,c，已知$(2a+c)\cos B+b\cos C=0$.

（1）求B；

（2）若$a=3$，点D在AC边上且$BD\perp AC$，$BD=\frac{15\sqrt{3}}{14}$，求c.

18. 设函数$f(x)=ax\ln x+\frac{1}{x}(a>0)$.

（1）当$a=1$时，求$f(x)$的极值；

（2）如果$f(x)\geqslant ax$在$(0,+\infty)$上恒成立，求实数a的取值范围.

19. 数列$\{a_n\}$满足$a_{n+2}=a_n+2$，且a_2. a_1.a_3.a_7成等比数列. 设$b_n=a_n+a_{n+1}$.

（1）求数列$\{b_n\}$的通项公式;（亲，题目没有让亲求数列$\{a_n\}$的通项公式）

（2）设$c_n=\frac{b_{n+2}}{2^{n+1}b_nb_{n+1}}$，求数列$\{c_n\}$的前 n 项和.

20. 在平面直角坐标系xoy中，设点$F(1，0)$，直线$l:x=-1$，点P在直线l上移动，R是线段PF与y轴的交点，异于点 R 的点 Q 满足： $RQ\perp FP$，$PQ\perp l$.

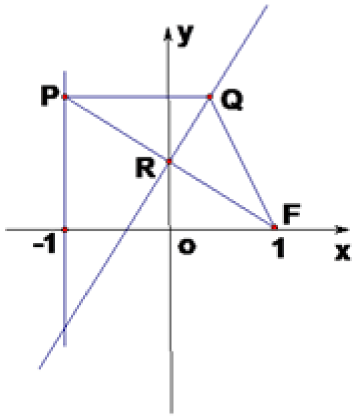
（1）求动点Q的轨迹的方程；

（2） 记Q的轨迹的方程为E，过点F作两条互相垂直的曲线E

的弦AB.CD，设AB.CD 的中点分别为M,N.

问直线MN是否经过某个定点？如果是，求出该定点，

如果不是，说明理由.



21. 已知函数$f(x)=2x-(x+1)\ln x$，$g(x)=x\ln x-ax^2-1$.

（1）求证：$\forall x\in(1,+\infty)$，$f(x)<2$；

（2）若方程$g(x)=0$有两个根，设两根分别为x_1,x_2, 求证：$\frac{\ln x_1+\ln x_2}{2}>1+\frac{2}{\sqrt{x_1x_2}}$.

22. 在平面直角坐标系xOy中，曲线C_1：$\begin{cases}x=\cos\alpha\\y=1+\sin\alpha\end{cases}$（α为参数），以坐标原点O为极点， x轴的正半轴为极轴建立极坐标系，曲线C_2的极坐标方程为$\rho=2\cos\theta+2\sqrt{3}\sin\theta$，直线l的极坐标方程为$\theta=\frac{\pi}{3}$.

（1）分别求曲线C_1的极坐标方程和曲线C_2的直角坐标方程；

（2）设直线l交曲线C_1于O， M两点，交曲线C_2于O， N两点，求线段MN的长.

23. 已知函数$f(x)=|x|+|x-6|$.

（1）求不等式$f(x)\le 10$的解集；

（2）记$f(x)$的最小值为m，若正实数a，b，c满足$a+b+c=m$，

求证：$\sqrt{a}+\sqrt{2b}+\sqrt{3c}\le m$.

广东省汕头市金山中学2017—2018学年度第一学期高三期中考试

理科数学

1. 已知集合$A=\{-1,0,1,2,3\}$，$B=\{x|x^2<17,x\in N\}$，则$A\cap B$等于（　　）

A. $\{-1,0,1,2,3\}$　　B. $\{0,1,2,3,4\}$　　C. $\{1,2,3\}$　　D. $\{0,1,2,3\}$

【答案】D

【解析】因为$B=\{x|x^2<17,x\in N\}=\{0,1,2,3,4\}$，所以$A\cap B=\{0,1,2,3\}$，故选 D.

2. 已知函数$f(x)=1-2\sin^2 3x$，则$y=f(x)$的图象相邻两条对称轴之间的距离是（　　）

A. $\frac{\pi}{12}$　　B. $\frac{\pi}{6}$　　C. $\frac{\pi}{3}$　　D. $\frac{2\pi}{3}$

【答案】B

【解析】因为$f(x)=1-2\sin^2 3x=\cos 6x$，所以周期$T=\frac{2\pi}{6}=\frac{\pi}{3}$,故相邻对称轴之间的距离为半周期$\frac{T}{2}=\frac{\pi}{6}$，故选B.

3. 已知当$0<x\leqslant\frac{1}{2}$时，不等式$\log_a x<-2$恒成立，则实数 a 的取值范围是（　　）

A. $(\sqrt{2},2)$　　B. $(1,\sqrt{2})$　　C. $(\frac{\sqrt{2}}{2},1)$　　D. $(0,\frac{\sqrt{2}}{2})$

【答案】B

【解析】当$0<x\leq\frac{1}{2}$时，不等式$\log_a x<-2$恒成立,所以$\log_a x<0$，又$0<x\leq\frac{1}{2}$，所以$a>1$，因此$y=\log_a x$是增函数，故$x<a^{-2}$恒成立，所以$\frac{1}{2}<a^{-2}$，解得$a<\sqrt{2}$，综上$1<a<\sqrt{2}$，故选 B.

4. 已知p：$a<0$，q：$a^2>a$；则p是q的（　　）

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

C. 充要条件　　D. 既不充分也不必要条件

【答案】A

【解析】试题分析：依题意有$a^2>a\Leftrightarrow a(a-1)>0\Leftrightarrow a<0,a>1$，故p是q充分不必要条件.

考点：充要条件.

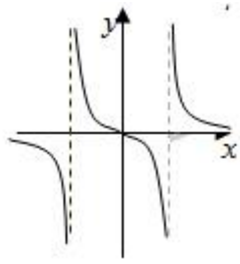
5. 已知函数$f(x)=x^2+(2a-1)x+b$是偶函数，那么函数$g(x)=\sqrt{\log_a x-1}$的定义域为（　　）

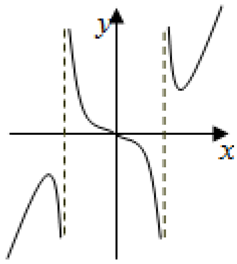
A. $(-\infty,\frac{1}{2}]$　　B. $(0,\frac{1}{2}]$　　C. $(0,2]$　　D. $[2,+\infty)$

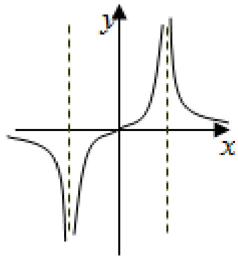
【答案】B

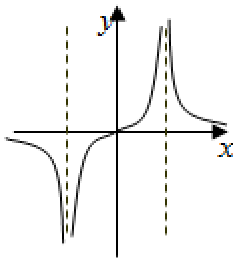
【解析】因为函数$f(x)=x^2+(2a-1)x+b$是偶函数，所以$2a-1=0$，解得$a=\frac{1}{2}$，若函数$g(x)=\sqrt{\log_a x-1}$有意义则$\log_a x-1\geq 0$，解得$0<x\leq\frac{1}{2}$，故选 B.

6. 函数$y=\frac{x^3}{\sqrt[3]{x^4-1}}$的大致图象是（　　）

A. 

B. 

C. 

D. 

【答案】B

【解析】因为$y=\frac{x^3}{\sqrt[3]{x^4-1}}$，所以函数$y=\frac{x^3}{\sqrt[3]{x^4-1}}$是奇函数，图象关于原点对称，故排除 C；当$x<-1$时，恒有$y<0$，故排除 D；$-1<x<0$时，$y>0$，故可排除 B；故选 A.

7. 已知函数$f(x)=\sin\omega x\cos\omega x(\omega>0)$，若存在实数$x_0$，使得对任意的实数$x$，都有$f(x_0)\leq f(x)\leq f(x_0+2016\pi)$恒成立，则$\omega$的最小值为（　　）

A. $\frac{1}{2016}$　B. $\frac{1}{4032}$　C. $\frac{1}{2016\pi}$　D. $\frac{1}{4032\pi}$

【答案】B

【解析】$f(x)=\sin\omega x\cos\omega x=\frac{1}{2}\sin 2\omega(\omega>0)$，所以周期$T=\frac{\pi}{\omega}$，存在实数$x_0$，使得对任意的实数$x$，都有$f(x_0)\leq f(x)\leq f(x_0+2016\pi)$恒成立，则$2016\pi\geq\frac{T}{2}=\frac{\pi}{2\omega}$,解得：$\omega\geq\frac{1}{4032}$，故选 B.

8. 已知定义在 R 上的函数$f(x)$满足$f(2)=2$，且对任意的实数x，都有$f(x)\cdot f(x+5)=15$恒成立，则$f(2017)$的值为（　　）

A. 2　B. $\frac{1}{2}$　C. $\frac{2}{15}$　D. $\frac{15}{2}$

【答案】D

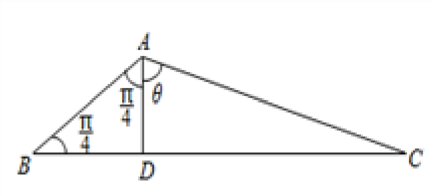
【解析】由$f(x)\cdot f(x+5)=15$知$f(x+5)=\frac{15}{f(x)}$，从而$f(x+10)=\frac{15}{f(x+5)}=f(x)$，周期$T=10$，从而$f(2017)=f(7)$，当$x=2$时，$f(2)\cdot f(7)=15$，所以$f(7)=\frac{15}{2}$，故选 D.

9. 在 $\triangle ABC$中，$B=\frac{\pi}{4}$，BC 边上的高等于$\frac{1}{3}BC$, 则$\cos A=$（　　）

A. $-\frac{3\sqrt{10}}{10}$　B. $-\frac{\sqrt{10}}{10}$　C. $\frac{3\sqrt{10}}{10}$　D. $\frac{\sqrt{10}}{10}$

【答案】B

【解析】设△ABC 中角 A、B、C、对应的边分别为 a、b、c，AD⊥BC 于 D，令∠DAC=θ，如图：



∵在△ABC 中，B=$\frac{\pi}{4}$，BC 边上的高 AD=h=$\frac{1}{3}$，BC=$\frac{1}{3}a$

∴BD=AD=$\frac{1}{3}a$，CD=$\frac{2}{3}a$

在 Rt△ADC 中，$\cos\theta=\frac{AD}{AC}=\frac{\frac{a}{3}}{\sqrt{(\frac{1}{3}a)^2+(\frac{2}{3}a)^2}}=\frac{\sqrt{5}}{5}$，故$\sin\theta=\frac{2\sqrt{5}}{5}$

∴$\cos A=\cos(\frac{\pi}{4}+\theta)=-\frac{\sqrt{10}}{10}$.

10. 已知函数$f(x)=\cos 4x+\cos(4x-\frac{\pi}{3})$，将$f(x)$的图象所有点的横坐标伸长为原来的 2 倍，纵坐标不变，再将图像向右平移$\frac{\pi}{6}$个单位，得到函数$y=g(x)$的图像，则$y=g(x)$的一个单调递增区间是（　　）

A. $[\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}]$　B. $[\frac{\pi}{6},\frac{2\pi}{3}]$　C. $[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}]$　D. $[-\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{6}]$

【答案】C

【解析】函数$f(x)=\cos 4x+\cos(4x-\frac{\pi}{3})=\sqrt{3}\sin(4x+\frac{\pi}{3})$的图象所有点的横坐标伸长为原来的 2 倍，纵坐标不变，再将图像向右平移$\frac{\pi}{6}$个单位，得到函数$y=g(x)=\sqrt{3}\sin[\frac{1}{2}(x-\frac{\pi}{6})+\frac{\pi}{3}]=\sqrt{3}\sin(\frac{1}{2}x+\frac{\pi}{4})$，当$-\frac{\pi}{4}<x<\frac{\pi}{4}$ 时，$\frac{\pi}{8}<\frac{1}{2}x+\frac{\pi}{4}<\frac{3\pi}{8}$，所以$y=g(x)$的一个递增区间是$[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}]$，故选 C.

11. 定义在$(0,+\infty)$内的连续可导函数$f(x)$满足$f(x)>0$，且$2f(x)<xf'(x)<3f(x)$对$\forall x\in(0,+\infty)$恒成立，则

（　　）

A. $\frac{1}{4}<\frac{f(1)}{f(2)}<\frac{1}{3}$　　B. $\frac{1}{3}<\frac{f(1)}{f(2)}<\frac{1}{2}$　　C. $\frac{1}{16}<\frac{f(1)}{f(2)}<\frac{1}{8}$　　D. $\frac{1}{8}<\frac{f(1)}{f(2)}<\frac{1}{4}$

【答案】D

【解析】令$g(x)=\frac{f(x)}{x^2},x\in(0,+\infty)$，　$g'(x)=\frac{xf'(x)-2f(x)}{x^3}$，

$\because\forall x\in(0,+\infty)$，$2f(x)<xf'(x)<3f(x)$恒成立，

$\therefore g'(x)=\frac{xf'(x)-2f(x)}{x^3}>0$，

∴函数$g(x)$在$x\in(0,+\infty)$上单调递增，$\therefore\frac{f(1)}{1}<\frac{f(2)}{4},\frac{f(1)}{f(2)}<\frac{1}{4}$.

令$h(x)=\frac{f(x)}{x^3},x\in(0,+\infty)$，

$h'(x)=\frac{xf'(x)-3f(x)}{x^4}$，

$\because\forall x\in(0,+\infty)$，$2f(x)<xf'(x)<3f(x)$恒成立，

$\therefore h'(x)=\frac{xf'(x)-3f(x)}{x^4}<0$，

∴函数$h(x)$在$x\in(0,+\infty)$上单调递减，

$\therefore\frac{f(1)}{1}>\frac{f(2)}{8}$，$\frac{f(1)}{f(2)}>\frac{1}{8}$

综上可得：$\frac{1}{8}<\frac{f(1)}{f(2)}<\frac{1}{4}$，故选 D.

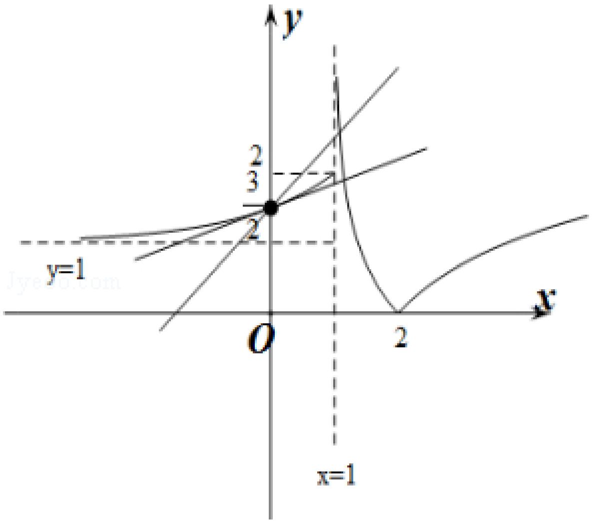
12. 已知函数$f(x)=\begin{cases}\frac{2^x+2}{2},x\le1\\|\ln(x-1)|,x>1\end{cases}$，且函数$F(x)=f[f(x)]-af(x)-\frac{3}{2}$恰有 4 个零点，下列选项中哪个集合内的$a$值均符合题意（　　）

A. $a\in\left\{\frac{1}{4},\frac{\ln2}{2},\frac{3}{5}\right\}$　B. $a\in\left\{\frac{1}{4},\frac{\ln2}{2},\frac{1}{2}\right\}$

C. $a\in\left\{\frac{1}{4},\frac{1}{2},\frac{3}{5}\right\}$　D. $a\in\left\{\frac{\ln2}{2},\frac{1}{2},\frac{3}{5}\right\}$

【答案】A

【解析】作出$f(x)$的函数图象如图所示：



令$f(x)=t$，则由图象可知：当$t=0$时，$f(x)=t$有 1 解，

当$0<t<1$或$t>2$时，$f(x)=t$有 2 解，

当$1<t\le 2$时，$f(x)=t$有 3 解，

令$F(x)=0$得$f(t)=at+\frac{3}{2}$，显然$t=0$是方程$f(t)=at+\frac{3}{2}$的一个解，

而$f(x)=0$只有一解，故直线$y=at+\frac{3}{2}$直线在$(1,2)$上与$f(x)$有 1 个交点即可；

（1）若$a>\frac{1}{2}$，显然直线$y=at+\frac{3}{2}$与$f(t)$在$(1,2)$上有 1 个交点，符合题意；

（2）当$a=\frac{\ln 2}{2}$时，直线$y=at+\frac{3}{2}$与$f(t)$在（﹣∞，1）上的图象相切，且与$f(t)$）在$(1,2)$上有 1 个交点，符合题意．所以选 A.

13. 若$\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha+\frac{1}{2}\cos\alpha=\frac{4}{5}$，则$\sin(\alpha+\frac{7\pi}{6})$的值是____________.

【答案】$-\frac{4}{5}$;

【解析】因为$\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha+\frac{1}{2}\cos\alpha=\sin(\alpha+\frac{\pi}{6})=\frac{4}{5}$，而$\sin(\alpha+\frac{7\pi}{6})=-\sin(\alpha+\frac{\pi}{6})=-\frac{4}{5}$，故填$-\frac{4}{5}$.

14. 已知点$A(1,0)$，$B(0,-1)$，$P(\cos\theta,\sin\theta)$，且$\theta\in[0,\pi]$，则$\overrightarrow{BP}\cdot\overrightarrow{BA}$的取值范围是____________.

【答案】$[0,\sqrt{2}+1]$;

【解析】因为$\overrightarrow{BA}=(1,1)$，$\overrightarrow{BP}=(\cos\theta,\sin\theta+1)$，

所以$\overrightarrow{BP}\cdot\overrightarrow{BA}=\cos\theta+\sin\theta+1=\sqrt{2}\sin(\theta+\frac{\pi}{4})+1$

$\because\theta\in[0,\pi]$，$\therefore -\frac{\sqrt{2}}{2}\le\sin(\theta+\frac{\pi}{4})\le 1$

$\therefore \overrightarrow{BP} \cdot \overrightarrow{BA} \in [0, \sqrt{2}+1]$

15. 定义在R上的奇函数$f(x)$满足$f(-2+x)=f(2+x)$，当$x\in(0,2)$时，$f(x)=\ln(2x^2-3x+2)$则$f(x)$在区间$[0,6]$上的零点个数是_________.

【答案】10；

【解析】因为$f(-2+x)=f(2+x)$，所以$f(x)=f(4+x)$，即函数周期$T=4$

故$f(-2)=f(2)$，又$f(x)$是定义在 R 上奇函数，所以$f(0)=0$，$f(2)=0$

由周期性知$f(0)=f(4)=0$，$f(2)=f(6)=0$

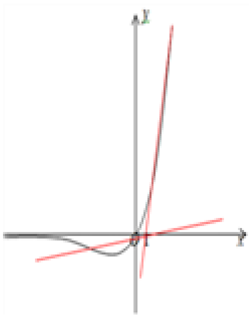
令$f(x)=\ln(2x^2-3x+2)=0$，解得$x=1$或$x=\frac{1}{2}$，所以$f(-1)=f(1)=f(3)=f(5)=0$，$f(\frac{1}{2})=f(\frac{9}{2})=0$且$f(-\frac{1}{2})=f(\frac{7}{2})=0$，

故函数 f（x）在区间$[0,6]$上的零点个数是 10，故答案为：10.

16. 已知函数$f(x)=3xe^x+a$，如果存在唯一的$x_0\in Z$，使得$f(x_0)<ax_0$成立，则实数 a 的取值范围是_________.

【答案】$[\frac{2}{e^2},\frac{3}{2e})\cup(6e^2,\frac{9e^3}{2}]$

【解析】令$g(x)=3xe^x, y=h(x)=ax-a$,做出图象如图：



存在唯一的$x_0\in Z$，使得$f(x_0)<ax_0$成立，即存在唯一的$x_0\in Z$使得$g(x_0)<h(x_0)$，

因为$g(0)=0, h(0)=-a$，$g(1)=3e, h(1)=0$，所以只需有唯一$x_0=0$满足条件即可.

而$g'(x)=3(x+1)e^x$，令$g'(x)=3(x+1)e^x=0$得$x=-1$，易知$g(x)_{min}=g(-1)=-\frac{3}{e}$

故只需满足$\begin{cases} g(-1)=-\frac{3}{e}<h(-1)=-2a \\ h(-2)=-3a\le g(-2)=-3a \end{cases}$解得$\frac{2}{e^2}\le a<\frac{3}{2e}$，

或者当$\begin{cases} g(1)\ge h(1) \\ g(2)<h(2) \\ g(3)\ge h(3) \end{cases}$时亦符合条件，此时解不等式组得$6e^2<a\le\frac{9e^3}{2}$，综上所述$\frac{2}{e^2}\le a<\frac{3}{2e}$或$6e^2<a\le\frac{9e^3}{2}$，

故填$[\frac{2}{e^2},\frac{3}{2e})\cup(6e^2,\frac{9e^3}{2}]$.

17. 在ΔABC中，角A,B,C的对边分别为a,b,c，已知$(2a+c)\cos B+b\cos C=0$.

（1）求B；

（2）若$a=3$，点D在AC边上且$BD\perp AC$，$BD=\frac{15\sqrt{3}}{14}$，求c.

【答案】（Ⅰ）$B=\frac{2\pi}{3}$；（Ⅱ）$c=5$.

【解析】试题分析：(1)利用正弦定理化边为角，易得：$2\sin A\cos B+\sin C\cos B+\sin B\cos C=0$，结合两角和正弦公式得$\sin A(2\cos B+1)=0$，即$\cos B=-\frac{1}{2}$，所以$B=\frac{2\pi}{3}$；（2）利用余弦定理得：$b^2=a^2+c^2+ac$，结合$\Delta ABC$的面积$S=ac\sin B=\frac{1}{2}b\cdot BD$，组建 c 的方程，解之即可.

试题解析：

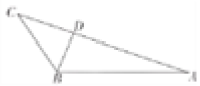
（Ⅰ）由$(2a+c)\cos B+b\cos C=0$及正弦定理，

可得$2\sin A\cos B+\sin C\cos B+\sin B\cos C=0$，

即$2\sin A\cos B+\sin(B+C)=0$，由$A+B+C=\pi$可得$\sin(B+C)=\sin A$，

所以$\sin A(2\cos B+1)=0$，

因为$0<A<\pi,\sin A\neq 0$，所以$\cos B=-\frac{1}{2}$，因为$B\in(0,\pi)$，所以$B=\frac{2\pi}{3}$.



（Ⅱ）由$B=\frac{2\pi}{3}$得$b^2=a^2+c^2+ac=c^2+3c+9$，

又因为$BD\perp AC$，所以ΔABC的面积$S=ac\sin B=\frac{1}{2}b\cdot BD$，

把$a=3,B=\frac{2\pi}{3},BD=\frac{15\sqrt{3}}{14}$，带入得$b=\frac{7}{5}c$，

所以$\left(\frac{7c}{5}\right)^2=c^2+3c+9$，解得$c=5$.

点睛：解三角形问题，多为边和角的求值问题，这就需要根据正、余弦定理结合已知条件灵活转化边和角之间的关系，从而达到解决问题的目的. 其基本步骤是：

第一步：定条件，即确定三角形中的已知和所求，在图形中标出来，然后确定转化的方向.

第二步：定工具，即根据条件和所求合理选择转化的工具，实施边角之间的互化.

第三步：求结果.

18. 设函数$f(x)=ax\ln x+\frac{1}{x}(a>0)$.

（1）当$a=1$时，求$f(x)$的极值；

（2）如果$f(x)\geqslant ax$在$(0,+\infty)$上恒成立，求实数a的取值范围.

【答案】$f(x)$有极小值$f(1)=1$，没有极大值；（2）$\left(0,\frac{2}{e}\right]$.

【解析】试题分析：（1）当$a=1$时，求导令导函数等于零，列表，通过表格找到函数极值即可；（2）求恒成立问题一般要分离参数，构造函数求其最小值，只需最小值大于零即可求出a取值范围.

试题解析：（1）由已知，当$a=1$时，$f(x)=x\ln x+\frac{1}{x}$，$\therefore f'(x)=\ln x+1-\frac{1}{x^2}$，$f''(x)=\frac{1}{x}+\frac{2}{x^3}>0$

$\therefore f'(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增，且$f'(1)=0$，

$f'(x)$，$f(x)$随x变化如下表：

x	$(0,1)$	1	$(1,+\infty)$
$f'(x)$	−	0	+
$f(x)$	↘	极小值	↗

$\therefore f(x)$有极小值$f(1)=1$，没有极大值.

（2）（方法一）由题可得$a(1-\ln x)\le\frac{1}{x^2}$恒成立，

当$x\ge e$时，上式恒成立；

当$0<x<e$时，$a\le\frac{1}{x^2(1-\ln x)}$，又$a>0$，故$\frac{1}{a}\ge x^2(1-\ln x)$

令$h(x)=x^2(1-\ln x)$，则$h'(x)=x(1-2\ln x)$，令$h'(x)=0$，$x=\sqrt{e}$

$\therefore$当$0<x<\sqrt{e}$时，$h'(x)>0$，$\sqrt{e}<x<e$时，$h'(x)<0$，

$\therefore h(x)_{max}=h(\sqrt{e})=e(1-\ln\sqrt{e})=\frac{e}{2}$，

$\therefore\frac{1}{a}\ge\frac{e}{2}$，解得：$0<a\le\frac{2}{e}$，$\therefore a$的取值范围是$\left(0,\frac{2}{e}\right]$.

（方法二）由题可得， 设$g(x)=ax\ln x+\frac{1}{x}-ax,(x>0)$，则$g'(x)=a\ln x-\frac{1}{x^2}$，

∵$a>0$，∴$g'(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增，$g'(1)=-1<0$， $g'\left(e^{\frac{1}{a}}\right)=1-\frac{1}{e^{\frac{2}{a}}}>0$，

∴$\exists x_0\in\left(1,e^{\frac{1}{a}}\right)$使得$g'(x_0)=0$，则$a=\frac{1}{x_0^2\ln x_0}$，

由$a>0$知$x_0>1$，且$0<x<x_0$时， $g'(x)<0$，$x>x_0$时， $g'(x)>0$，

∴$g(x)_{min}=g(x_0)=\frac{2\ln x_0-1}{x_0\ln x_0}\ge0$，∴$\ln x_0\ge\frac{1}{2}$，∴$x_0\ge\sqrt{e}$，∴$a\le\frac{2}{e}$，

∴a的取值范围是$\left(0,\frac{2}{e}\right]$.

（方法三）由题可得$\frac{f(x)}{x}-a=a\ln x+\frac{1}{x^2}-a\ge0$恒成立，

令$h(x)=a\ln x+\frac{1}{x^2}-a$，则$h'(x)=\frac{a\left(x+\sqrt{\frac{2}{a}}\right)\left(x-\sqrt{\frac{2}{a}}\right)}{x^3}$，

∴$0<x<\sqrt{\frac{2}{a}}$时， $h'(x)<0$，$x>\sqrt{\frac{2}{a}}$时， $h'(x)>0$，∴$h(x)_{min}=h\sqrt{\frac{2}{a}}=a\ln\sqrt{\frac{2}{a}}-\frac{2}{a}\ge0$，

∴$\ln\frac{2}{a}\ge1$，解得： $a\le\frac{2}{e}$，∴a的取值范围是$\left(0,\frac{2}{e}\right]$.

19. 数列$\{a_n\}$满足$a_{n+2}=a_n+2$，且$a_2.\ a_1.a_3.a_7$成等比数列． 设$b_n=a_n+a_{n+1}$.

（1）求数列$\{b_n\}$的通项公式；（亲，题目没有让亲求数列$\{a_n\}$的通项公式）

（2）设$c_n=\frac{b_{n+2}}{2^{n+1}b_nb_{n+1}}$， 求数列$\{c_n\}$的前 *n* 项和.

【答案】（Ⅰ）$b_n=\ 2n+1$；（Ⅱ）$\frac{1}{6}-\frac{1}{(2n+3)2^{n+1}}$.

【解析】试题分析:（1）根据递推关系式$b_n=a_n+a_{n+1}$及$a_{n+2}=a_n+2$，考虑$b_{n+1}-b_n$，可证明b_n是等差数列，求其通项公式即可；（2）根据$c_n=\frac{b_{n+2}}{2^{n+1}b_nb_{n+1}}=\frac{2n+5}{(2n+1)(2n+3)2^{n+1}}=\frac{2(2n+3)-(2n+1)}{(2n+1)(2n+3)2^{n+1}}$，裂项相消，可求数列前 n 项和.

试题解析：（Ⅰ）由$a_{n+2}=a_n+2$及a_2，a_1，a_3，a_7成等比数列得$\begin{cases} a_2\cdot a_3=a_1^2 \\ a_1\cdot a_7=a_3^2 \end{cases}$，

即$\begin{cases} a_2(a_1+2)=a_1^2 \\ a_1(a_1+6)=(a_1+2)^2 \end{cases}$，解得$a_1=2$，$a_2=1$，所以$b_1=a_1+a_2=3$，

$b_{n+1}-b_n=(a_{n+2}+a_{n+1})-(a_{n+1}+a_n)=a_{n+2}-a_n=2$，

所以数列$\{b_n\}$是首项为3，公差为2的等差数列，所以$b_n=3+2(n-1)=2n+1$.

（Ⅱ）因为$c_n=\dfrac{b_{n+2}}{2^{n+1}b_nb_{n+1}}=\dfrac{2n+5}{(2n+1)(2n+3)2^{n+1}}=\dfrac{2(2n+3)-(2n+1)}{(2n+1)(2n+3)2^{n+1}}$

$=\dfrac{1}{(2n+1)2^n}-\dfrac{1}{(2n+3)2^{n+1}}$.

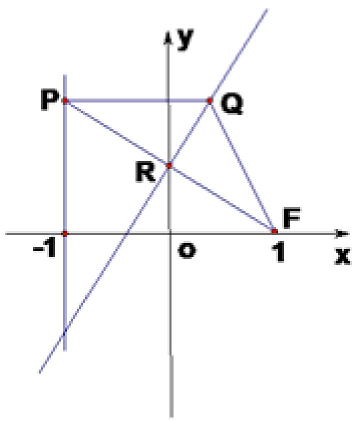
$c_1+c_2+\cdots+c_n=\dfrac{1}{3\times 2}-\dfrac{1}{5\times 4}+\dfrac{1}{5\times 4}-\dfrac{1}{7\times 8}+\cdots+\dfrac{1}{(2n+1)2^n}-\dfrac{1}{(2n+3)2^{n+1}}=\dfrac{1}{6}-\dfrac{1}{(2n+3)2^{n+1}}$.

20. 在平面直角坐标系xoy中，设点F(1，0)，直线l:x = −1，点P在直线l上移动，R是线段PF与y轴的交点，异于点 R 的点 Q 满足：RQ ⊥FP，PQ ⊥l.

（1）求动点Q的轨迹的方程；

（2） 记Q的轨迹的方程为E，过点F作两条互相垂直的曲线E的弦AB.CD，设AB.CD 的中点分别为M ,N.

问直线MN是否经过某个定点？如果是，求出该定点，如果不是，说明理由.



【答案】(Ⅰ)$y^2=4x(x>0)$；(Ⅱ)以直线MN恒过定点R $(3,0)$.

【解析】试题分析：（1）由已知条件知，点 R 是线段 FP 的中点，RQ 是线段 FP 的垂直平分线，点

Q 的轨迹 E 是以 F 为焦点，l 为准线的抛物线，写出抛物线标准方程．

（2）设出直线 AB 的方程，把 A、B 坐标代入抛物线方程，再利用中点公式求出点 M 的坐标，同理可得 N 的坐标，求出直线 MN 的斜率，得到直线 MN 的方程并化简，可看出直线 MN 过定点．

试题解析：（Ⅰ）依题意知，直线l的方程为：$x=-1$．点R是线段FP的中点，

且$RQ\perp FP$，$\therefore$ RQ是线段FP的垂直平分线．

$\therefore |PQ|$是点Q到直线l的距离．

$\because$点Q在线段FP的垂直平分线，$\therefore |PQ|=|QF|$．

故动点Q的轨迹E是以F为焦点，l为准线的抛物线，

其方程为：$y^2=4x(x>0)$．

（Ⅱ）设$A(x_A,y_A),B(x_B,y_B)$，$M(x_M,y_M),N(x_N,y_N)$，

由 AB⊥CD，且 AB、CD 与抛物线均有两个不同的交点，故直线 AB、CD 斜率均存在，设直线 *AB* 的方程为

$y=k(x-1)$

则$\begin{cases} y_A^{\ 2}=4x_A & (1) \\ y_B^{\ 2}=4x_B & (2) \end{cases}$

（1）—（2）得$y_A+y_B=\frac{4}{k}$，即$y_M=\frac{2}{k}$，

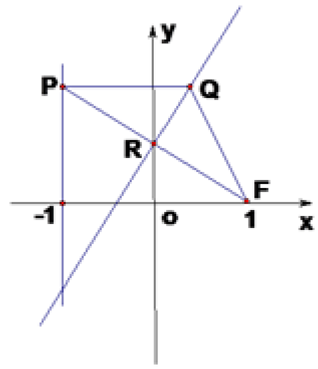
代入方程$y=k(x-1)$，解得$x_M=\frac{2}{k^2}+1$．所以点M的坐标为$(\frac{2}{k^2}+1,\frac{2}{k})$．

同理可得：N的坐标为$(2k^2+1,-2k)$．

直线MN的斜率为$k_{MN}=\frac{y_M-y_N}{x_M-x_N}=\frac{k}{1-k^2}$，方程为

$y+2k=\frac{k}{1-k^2}(x-2k^2-1)$，整理得$y(1-k^2)=k(x-3)$，

显然，不论k为何值，$(3,0)$均满足方程，所以直线MN恒过定点R $(3,0)$．



21. 已知函数$f(x)=2x-(x+1)\ln x$，$g(x)=x\ln x-ax^2-1$.

（1）求证：$\forall x\in(1,+\infty)$，$f(x)<2$；

（2）若方程$g(x)=0$有两个根，设两根分别为x_1,x_2，求证：$\frac{\ln x_1+\ln x_2}{2}>1+\frac{2}{\sqrt{x_1x_2}}$.

【答案】(1)证明见解析；(2)证明见解析.

【解析】试题分析：（1）利用导数和函数的最值得关系即可证明；（2）令$g(x)=x\ln x-1-ax^2=0$，得$\ln x-\frac{1}{x}=ax$，于是有$\ln x_1-\frac{1}{x_1}=ax_1$，$\ln x_2-\frac{1}{x_2}=ax_2$通过两式相加减，以及代入计算可得$\ln x_1x_2-\frac{2(x_1+x_2)}{x_1x_2}=\frac{x_1+x_2}{x_2-x_1}\ln\frac{x_2}{x_1}$，再令$t=\frac{x_2}{x_1}(t>1)$，问题转化为$\ln x_1x_2-\frac{2(x_1+x_2)}{x_1x_2}>2$，利用放缩和基本不等式即可证明.

试题解析：(1) $\forall x\in(1,+\infty),f(x)<2\Leftrightarrow(x+1)\ln x>2x-2$

$\Leftrightarrow\frac{x+1}{x-1}\ln x>2\Leftrightarrow\ln x>\frac{2(x-1)}{x+1}\Leftrightarrow\ln x-\frac{2(x-1)}{x+1}>0$.

下面证明：对$\forall x\in(1,+\infty),\ln x-\frac{2(x-1)}{x+1}>0$，令$h(x)=\ln x-\frac{2(x-1)}{x+1}(x>1)$，

则$h'(x)=\frac{(x-1)^2}{x(x+1)^2}>0$，所以$h(x)$在$(1,+\infty)$上单调递增，所以$h(x)>h(1)=0$，

即$\ln x-\frac{2(x-1)}{x+1}>0$，即证得：$\forall x\in(1,+\infty),f(x)<2$.

(2) 由$g(x)=x\ln x-1-ax^2=0$，得$\ln x-\frac{1}{x}=ax$，于是有$\ln x_1-\frac{1}{x_1}=ax_1$，$\ln x_2-\frac{1}{x_2}=ax_2$，

两式相加得$\ln x_1x_2-\frac{x_1+x_2}{x_1x_2}=a(x_1+x_2)$，　①

两式相减得$\ln\frac{x_2}{x_1}-\frac{x_1-x_2}{x_1x_2}=a(x_2-x_1)$，即可得$\frac{\ln\frac{x_2}{x_1}}{x_2-x_1}+\frac{1}{x_1x_2}=a$，②

将②代入①可得$\ln x_1x_2-\frac{x_1+x_2}{x_1x_2}=(\frac{\ln\frac{x_2}{x_1}}{x_2-x_1}+\frac{1}{x_1x_2})(x_1+x_2)$，

即$\ln x_1x_2-\frac{2(x_1+x_2)}{x_1x_2}=\frac{x_1+x_2}{x_2-x_1}\ln\frac{x_2}{x_1}$，

不妨设$0<x_1<x_2,t=\frac{x_2}{x_1}(t>1)$，则$\frac{x_1+x_2}{x_2-x_1}\ln\frac{x_2}{x_1}=\frac{t+1}{t-1}\ln t(t>1)$，

由（1）可知$\frac{t+1}{t-1}\ln t>2$，$\therefore\ln x_1x_2-\frac{2(x_1+x_2)}{x_1x_2}>2$，

又因为$\ln x_1x_2-\frac{2(x_1+x_2)}{x_1x_2}<\ln x_1x_2-\frac{4\sqrt{x_1x_2}}{x_1x_2}=\ln x_1x_2-\frac{4}{\sqrt{x_1x_2}}=2\ln\sqrt{x_1x_2}-\frac{4}{\sqrt{x_1x_2}}$，

$\therefore 2\ln\sqrt{x_1x_2}-\frac{4}{\sqrt{x_1x_2}}>2$，$\therefore\ln\sqrt{x_1x_2}-\frac{1}{\sqrt{x_1x_2}}>1$，即$\frac{\ln x_1+\ln x_2}{2}>1+\frac{2}{\sqrt{x_1x_2}}$.

22. 在平面直角坐标系xOy中，曲线C_1：$\begin{cases} x = \cos\alpha \\ y = 1 + \sin\alpha \end{cases}$（α为参数），以坐标原点O为极点， x轴的正半轴为极轴建立极坐标系，曲线C_2的极坐标方程为$\rho = 2\cos\theta + 2\sqrt{3}\sin\theta$，直线l的极坐标方程为$\theta = \frac{\pi}{3}$.

（1）分别求曲线C_1的极坐标方程和曲线C_2的直角坐标方程；

（2）设直线l交曲线C_1于O， M两点，交曲线C_2于O， N两点，求线段MN的长.

【答案】（Ⅰ）曲线C_1 $\rho = 2\sin\theta$, 曲线C_2 $(x-1)^2 + (y-\sqrt{3})^2 = 4$.（Ⅱ）$4-\sqrt{3}$.

【解析】试题分析:

（I）由 $x = \rho\cos\theta$，$y = \rho\sin\theta$，$x^2 + y^2 = \rho^2$，能求出曲线 C_1 的极坐标方程，曲线 C_2 的参数方程消去参数能求出曲线 C_2 的普通方程，从而能求出曲线 C_2 的极坐标方程.

（Ⅱ）联立直线与圆的方程，求交点坐标，计算$|OM|$，$|ON|$的长，从而根据$|MN| = |ON|-|OM|$计算可得.

试题解析：（Ⅰ）曲线C_1的普通方程为$x^2 + (y-1)^2 = 1$，即$x^2 + y^2 - 2y = 0$，

曲线C_1的极坐标方程为$\rho^2 - 2\rho\sin\theta = 0$，即$\rho = 2\sin\theta$.

因为曲线C_2的极坐标方程为$\rho = 2\cos\theta + 2\sqrt{3}\sin\theta$，即$\rho^2 = 2\rho\cos\theta + 2\sqrt{3}\rho\sin\theta$，

故曲线C_2的直角坐标方程为$x^2 + y^2 = 2x + 2\sqrt{3}y$，即$(x-1)^2 + (y-\sqrt{3})^2 = 4$.

（Ⅱ）直线l的极坐标方程为$\theta = \frac{\pi}{3}$，化为直角坐标方程得$y = \sqrt{3}x$，

由$\begin{cases} y = \sqrt{3}x, \\ x^2 + y^2 - 2y = 0, \end{cases}$ 得$\begin{cases} x = 0, \\ y = 0, \end{cases}$ 或$\begin{cases} x = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ y = \frac{3}{2} \end{cases}$. 则$|OM| = \sqrt{\frac{3}{4} + \frac{9}{4}} = \sqrt{3}$，

由$\begin{cases} y = \sqrt{3}x, \\ x^2 + y^2 = 2x + 2\sqrt{3}y, \end{cases}$ 得$\begin{cases} x = 0, \\ y = 0, \end{cases}$ 或$\begin{cases} x = 2, \\ y = 2\sqrt{3}. \end{cases}$ 则$|ON| = \sqrt{4 + 12} = 4$.

故$|MN| = |ON| - |OM| = 4 - \sqrt{3}$.

23. 已知函数$f(x)=|x|+|x-6|$.

（1）求不等式$f(x)\le 10$的解集；

（2）记$f(x)$的最小值为m，若正实数a，b，c满足$a+b+c=m$，

求证：$\sqrt{a}+\sqrt{2b}+\sqrt{3c}\le m$.

【答案】（Ⅰ） $[-2,8]$；（Ⅱ）证明见解析.

【解析】试题分析：（I）利用绝对值的意义，写出分段函数，即可求不等式 f（x）≤10 的解集；（II）利用绝对值不等式，求出 m，再利用柯西不等式进行证明.

试题解析：（Ⅰ） $f(x)=\begin{cases}-2x+6, x\le 0,\\ 6, 0<x\le 6,\\ 2x-6, x>6.\end{cases}$

当$x\le 0$时，由$-2x+6\le 10$，解得$-2\le x\le 0$；

当$0<x\le 6$时，因为$6<10$，所以$0<x\le 6$；

当$x>6$时，由$2x-6\le 10$，解得$6<x\le 8$

综上可知，不等式$f(x)\le 10$的解集为$[-2,8]$.

（Ⅱ）由（Ⅰ）知，$f(x)$的最小值为 6，即$m=6$.（或者$|x|+|x-6|\ge |x-(x-6)|=6$），所以$a+b+c=6$，

由柯西不等式可得$(a+b+c)(1+2+3)=\left((\sqrt{a})^2+(\sqrt{b})^2+(\sqrt{c})^2\right)\left((\sqrt{1})^2+(\sqrt{2})^2+(\sqrt{3})^2\right)$

$\ge(\sqrt{a}+\sqrt{2b}+\sqrt{3c})^2$

因此$\sqrt{a}+\sqrt{2b}+\sqrt{3c}\ \le 6=m$.