2017—2018 学年上期中考
18 届 高三数学理科试题

说明： 1. 试卷分第Ⅰ卷（选择题）和第Ⅱ卷(非选择题)满分 150 分，考试时间 120 分钟.

2. 将第Ⅰ卷的答案代表字母填（涂）在第Ⅱ卷的答题表（答题卡）中.

第Ⅰ卷　（选择题，共 60 分）

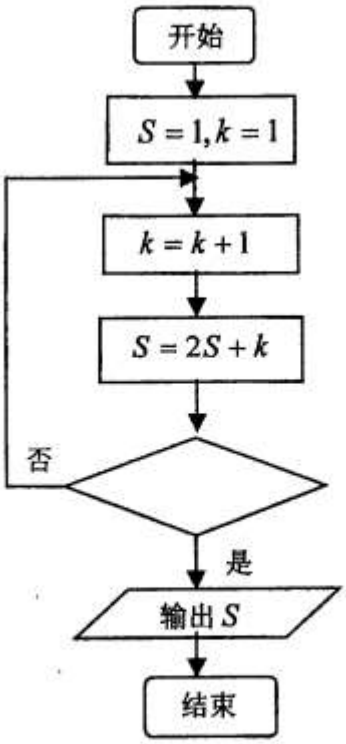
一、选择题：本大题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分，在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1. 设集合 $M=\{m\in\mathbf{Z}\mid -3<m<2\}$，$N=\{n\in N\mid -1\le n\le 3\}$，$M\cap N=$（　）

A. $\{0,1\}$　B. $\{-1,0,1\}$　C. $\{0,1,2\}$　D. $\{-1,0,1,2\}$

2. 我国古代数学名著《九章算术》有“米谷粒分”题：粮仓开仓收粮，有人送来米 1534 石，验得米内夹谷，抽样取米一把，数得 254 粒内夹谷 28 粒，则这批米内夹谷约为（　）

A. 134 石　B. 169 石　C. 338 石　D. 1365 石



3. 复数 $z_1=3-bi, z_2=1-2i$，若 $\frac{z_1}{z_2}$ 是实数，则实数 b 的值为（　）

A. 0　B. $-\frac{3}{2}$　C. 6　D. -6

4. 某程序框图如图所示，若输出的 $S=57$，则判断框内应填入（　）

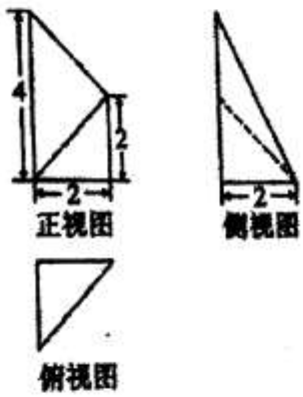
A. $k>4$?　B. $k>5$?　C. $k>6$?　D. $k>7$?

5. 已知命题 p：对任意 $x\in R$，总有 $2^x>0$；命题 q：“$x>1$”是“$x>2$”的充分不必要条件，则下列命题为真命题的是（　）

A. $p\wedge q$　B. $p\wedge\neg q$　C. $\neg p\vee q$　D. $\neg p\wedge q$

6. 等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，若公差 $d=-2$，$S_3=21$，则当 S_n 取最大值时，n 的值为（　）

A. 10　B. 9　C. 6　D. 5



7. 某空间几何体的三视图如图所示，则该几何体的体积为（　）

A. 1　B. 2　C. 4　D. 8

8. 设x,y 满足约束条件$\begin{cases} x-2y+3\geq 0 \\ 2x-3y+4\leq 0 \\ y\geq 0 \end{cases}$，若目标函数$z=ax+by$（其中$a>0,b>0$）

的最大值为3，则ab^2的最大值为（　　）

A．1　　B．2　　C．3　　D．4

9．已知函数$f(x)$对定义域R内的任意x都有$f(x)=f(4-x)$，且当$x\neq 2$时其导函数$f'(x)$满足$(x-2)f'(x)>0$,若$2<a<4$则（　　）

A．$f(2^a)<f(3)<f(\log_2 a)$　　B．$f(3)<f(\log_2 a)<f(2^a)$

C．$f(\log_2 a)<f(3)<f(2^a)$　　D．$f(\log_2 a)<f(2^a)<f(3)$

10．在三棱锥$A-BCD$中，$AB=AC=1,DB=DC=2,AD=BC=\sqrt{3}$,则三棱锥$A-BCD$的外接球的表面积为（　　）

A．π　　B．4π　　C．7π　　D．9π

11．已知椭圆$\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{5}=1$的右焦点为$F,P$是椭圆上一点，点$A\left(0,2\sqrt{3}\right)$，当$\Delta APF$的周长最大时，$\Delta APF$的面积为（　　）

A．$\dfrac{11}{4}$　　B．$\dfrac{11\sqrt{3}}{4}$　　C．$\dfrac{21}{4}$　　D．$\dfrac{21\sqrt{3}}{4}$

12. 已知函数$f(x)=(x^2-2x)\sin(x-1)+x+2017$在$[-2016,2018]$上的最大值为$M$，最小值$m$，则$M+m=$（　　）

A．2017　　B．2018　　C．4034　　D．4036

第 II 卷　（非选择题，共90分）

二、填空题：本大题共4小题，每小题5分，共20分．

13．二项式$(x-\dfrac{1}{x})^6$展开式中x^2项的系数为__________ ．

14．设$x,y\in R$，向量$\vec{a}=(x,1)$，$\vec{b}=(1,y)$，$\vec{c}=(2,-4)$，且$\vec{a}\perp\vec{c}$，$\vec{b}//\vec{c}$，则$\left|\vec{a}+\vec{b}\right|=$__________ ．

15．若将函数$f(x)=\sin(2x+\varphi)+\sqrt{3}\cos(2x+\varphi)(0<\varphi<\pi)$的图像向左平移$\dfrac{\pi}{4}$个单位长度，平移后的图像关于点$\left(\dfrac{\pi}{2},0\right)$对称，则函数$g(x)=\cos(x+\varphi)$在$\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{6}\right]$上的最小值是__________ ．

16．数列$\{a_n\}$满足$a_n=\begin{cases}n^2,a_{n-1}<n^2\\2a_{n-1},a_{n-1}\ge n^2\end{cases}(n\ge2)$，若$\{a_n\}$为等比数列，则首项$a_1$的取值范围是____________．

三、解答题：共 70 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．第 17-21 题为必考题，每个试题考生都必须作答．第 22、23 题为选考题，考生根据要求作答．

（一）必考题：共 60 分．

17．(12 分)

已知ΔABC中，角A,B,C对边分别是a,b,c，

$2\sqrt{2}\left(\sin^2A-\sin^2C\right)=(a-b)\sin B$，且$\Delta ABC$的外接圆半径为$\sqrt{2}$．

（1）求角C的大小；

（2）求ΔABC面积的最大值．

18．(12 分)

某厂生产的产品在出厂前都要做质量检测，每一件一等品都能通过检测，每一件二等品通过检测的概率为$\dfrac{2}{3}$．现有 10 件产品，其中 6 件是一等品，4 件是二等品．

（1）随机选取 1 件产品，求能够通过检测的概率；

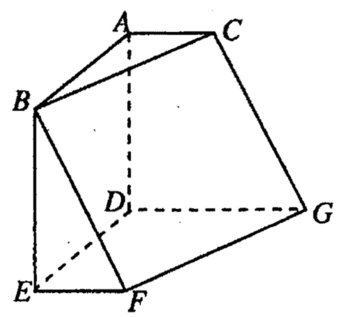
（2）随机选取 3 件产品，其中一等品的件数记为X，求X的分布列及数学期望．

19．(12 分)

如图，在六面体$ABCDEFG$中，平面$ABC//$平面$DEFG$，$AD\perp$平面$DEFG$，$ED\perp DG$，$EF//DG$．且$AB=AD=DE=DG=2$，$AC=EF=1$．

（1） 求证：$BF//$平面$ACGD$；

（2） 求锐二面角D-CG-F的余弦值．



20．(12 分)

设$A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$是椭圆$\dfrac{y^2}{a^2}+\dfrac{x^2}{b^2}=1(a>b>0)$上的两点，椭圆的离心率为$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，短轴长为 2，已知向量$\vec{m}=\left(\dfrac{x_1}{b},\dfrac{y_1}{a}\right)$，$\vec{n}=\left(\dfrac{x_2}{b},\dfrac{y_2}{a}\right)$，且$\vec{m}\perp\vec{n}$，O 为坐标原点．

（1）若直线AB过椭圆的焦点$F(0,c)$，（c为半焦距），求直线AB的斜率k的值；

（2）试问：$\triangle AOB$的面积是否为定值？如果是，请给予证明；如果不是，请说明理由．

21．(12 分)

已知函数 $f\left(x\right)=\ln\left(x-1\right)-k(x-1)+1$.

（1）求函数 $f\left(x\right)$ 的单调区间；

（2）若 $f\left(x\right)\le 0$ 恒成立，试确定实数 k 的取值范围；

（3）证明：$\dfrac{\ln 2}{3}+\dfrac{\ln 3}{4}+\dfrac{\ln 4}{5}+\cdots+\dfrac{\ln n}{n+1}<\dfrac{n\left(n-1\right)}{4}\left(n\in N^{*},n>1\right)$.

（二）选考题：共 10 分．请考生在第 22、23 题中任选一题作答．如果多做，则按所做的第一题计分.

22．（10 分）

选修 4-4：坐标系与参数方程

在直角坐标系 xOy 中，直线 l 的参数方程为 $\begin{cases}x=1+t\cos\alpha\\y=2+t\sin\alpha\end{cases}$ (t 为参数)，在极坐标系(与直角坐标系 xOy 取相同的长度单位，且以原点 O 为极点，以 x 轴正半轴为极轴)中，圆 C 的方程为 $\rho=6\sin\theta$.

（1）求圆 C 的直角坐标方程；

（2）设圆 C 与直线 l 交于点 A，B，若点 P 的坐标为 $P\left(1,2\right)$，求 $\left|PA\right|+\left|PB\right|$ 的最小值.

23．（10 分）

选修 4-5：不等式选讲

已知不等式 $2\left|x-3\right|+\left|x-4\right|<2a$.

（1）若 $a=1$，求不等式的解集；

（2）若已知不等式的解集不是空集，求 a 的取值范围.

2017—2018 学年上期中考

18 届 高三数学理科答案

一、选择题：共 60 分.

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答案	A	B	C	A	B	D	C	A	C	C	D	D

二、填空题：共 20 分.

13．15　　14．$\sqrt{10}$　　15．$\frac{1}{2}$　　16．$\left[\frac{9}{2},+\infty\right)$

三、解答题：共 70 分.

17.解：（1）由 $2\sqrt{2}$（$\sin^2A-\sin^2C$）=（$a-b$）$\cdot\sin B$ 得

$2\sqrt{2}\left(\frac{a^2}{4R^2}-\frac{c^2}{4R^2}\right)=(a-b)\frac{b}{2R}$. ………………2 分

又 ∵$R=\sqrt{2}$，∴$a^2-c^2=ab-b^2$. ∴$a^2+b^2-c^2=ab$………………4 分

∴$\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\frac{1}{2}$.

又∵$0°<C<180°$，∴$C=60°$. ………………6 分

（2）$S=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}ab=2\sqrt{3}\sin A\sin B=2\sqrt{3}\sin A\sin(120°-A)$

$=2\sqrt{3}\sin A(\sin120°\cos A-\cos120°\sin A)=3\sin A\cos A+\sqrt{3}\sin^2A$

$=\frac{3}{2}\sin2A-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos2A+\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}\sin(2A-30°)+\frac{\sqrt{3}}{2}$. ………………10 分

∴当 $2A=120°$，即 $A=60°$时，$S_{max}=\frac{3\sqrt{3}}{2}$………………12 分

18.解：(Ⅰ)设随机选取一件产品，能够通过检测的事件为 A　　…………………1 分

事件 A 等于事件“选取一等品都通过检测或者是选取二等品通过检测”…………2 分

$p(A)=\frac{6}{10}+\frac{4}{10}\times\frac{2}{3}=\frac{13}{15}$　　………………4 分

(Ⅱ) 由题可知 X 可能取值为 0,1,2,3.

$P(X=0)=\frac{C_4^3C_6^0}{C_{10}^3}=\frac{1}{30}$, $P(X=1)=\frac{C_4^2C_6^1}{C_{10}^3}=\frac{3}{10}$,

$P(X=2)=\frac{C_4^1C_6^2}{C_{10}^3}=\frac{1}{2},P(X=3)=\frac{C_4^0C_6^3}{C_{10}^3}=\frac{1}{6}$. ………………8 分

分布列：

X	0	1	2	3
P	$\frac{1}{30}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$

…………10 分

$\therefore EX=\frac{3}{10}\times1+\frac{1}{2}\times2+\frac{1}{6}\times3=\frac{9}{5}$ ………………12 分

19.解：(1)设 DG 的中点为 M，连接 AM，FM.易证：四边形 $DEFM$ 是平行四边形.

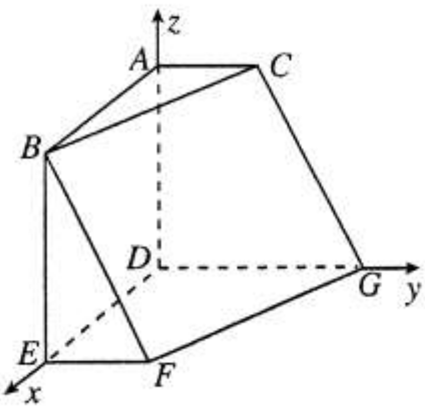
$\therefore MF\parallel DE$，且 $MF=DE$.

$\because$平面 $ABC\parallel$平面 $DEFG$，$\therefore AB\parallel DE$，

$\because AB=DE$.$\therefore MF\parallel AB$，且 $MF=AB$，$\therefore$四边形 $ABFM$ 是平行四边形，

$\therefore BF\parallel AM$. 又 $BF\not\subset$平面 $ACGD$，$AM\subset$平面 $ACGD$，

故 $BF\parallel$平面 $ACGD$. ………………5 分



（2）由题意可得，AD，DE，DG 两两垂直，故可建立如图所示的空间直角坐标系.

$\overrightarrow{FG}=(0,2,0)-(2,1,0)=(-2,1,0)$. 设平面 $BCGF$ 的法向量为 $\overrightarrow{n_1}=(x,y,z)$，

则 $\begin{cases}\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{FG}=-2x+y=0\\ \overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{CG}=-2z+y=0\end{cases}$，令 $y=2$，则 $\boldsymbol{n}_1=(1,2,1)$.

又平面 $ADGC$ 的法向量 $\overrightarrow{n_2}=(1,0,0)$. ………………9 分

$\therefore\cos\langle \boldsymbol{n}_1,\boldsymbol{n}_2\rangle=\frac{\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}_2}{|\boldsymbol{n}_1|\cdot|\boldsymbol{n}_2|}=\frac{1\times1}{\sqrt{1^2+2^2+1^2}\times\sqrt{1^2+0^2+0^2}}=\frac{\sqrt{6}}{6}$.

由于所求的二面角为锐二面角，$\therefore$二面角 D-CG-F 的余弦值为$\frac{\sqrt{6}}{6}$. ………………12 分

20. 解：（1）由题可得：$a=2,b=1$，所以，椭圆的方程为$\frac{y^2}{4}+x^2=1$ ………………2 分

设 AB 的方程为：$y=kx+\sqrt{3}$，代入$\frac{y^2}{4}+x^2=1$得：$(k^2+4)x^2+2\sqrt{3}kx-1=0$

$\therefore x_1+x_2=\frac{-2\sqrt{3}k}{k^2+4},x_1x_2=\frac{-1}{k^2+4},\Delta>0$ ....4 分

$\because \vec{m}\perp\vec{n},\therefore \vec{m}\cdot\vec{n}=0$ 即：$\frac{y_1y_2}{4}+x_1x_2=\left(1+\frac{k^2}{4}\right)x_1x_2+\frac{\sqrt{3}k}{4}(x_1+x_2)+\frac{3}{4}=0$

即$\frac{k^2+4}{4}\left(-\frac{1}{k^2+4}\right)+\frac{\sqrt{3}k}{4}\cdot\frac{-2\sqrt{3}k}{k^2+4}+\frac{3}{4}=0$，解得：$k=\pm2$ ....6 分

（2）当 A 为顶点时，B 必为顶点，　则 $S_{\Delta AOB}=1$　　......................7 分

当 A，B 不为顶点时，设 AB 的方程为 $y=kx+m$，

联立$\begin{cases}y=kx+m\\ \frac{y^2}{4}+x^2=1\end{cases}$ 得：$\left(k^2+4\right)x^2+2kmx+m^2-4=0$

$\therefore x_1+x_2=\frac{-2km}{k^2+4},x_1x_2=\frac{m^2-4}{k^2+4},\Delta>0$

$\therefore S_{\Delta AOB}=\frac{1}{2}|m||x_1-x_2|=\frac{1}{2}|m|\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=\frac{2|m|\sqrt{k^2-m^2+4}}{k^2+4}=1$

所以三角形的面积为定值 1 ....12 分

21．解：(1)定义域为$(1,+\infty)$，$f'(x)=\frac{1}{x-1}-k=\frac{1+k-kx}{x-1}$

若$k\le0$，$f'(x)=\frac{1}{x-1}-k\ge0$，$f(x)$在$(1,+\infty)$上单调递增

若$k>0$，$f'(x)=\frac{-k\left(x-\frac{1+k}{k}\right)}{x-1}$，

所以，当$f'(x)>0$时，$1<x<\frac{1}{k}+1$；当$f'(x)<0$时，$x>\frac{1}{k}+1$

综上：若$k\le0$，$f(x)$在$(1,+\infty)$上单调递增；

若 $k>0$，$f(x)$ 在 $(1,\frac{1}{k}+1)$ 上单调递增，在 $(\frac{1}{k}+1,+\infty)$ 上单调递减………………4 分

(2)由(1)知，$k\le 0$ 时，$f(2)=1-k>0$ 不可能成立；

若 $k>0$，$f(x)\le 0$ 恒成立 $\Leftrightarrow f(x)_{\max}=f\left(\frac{1}{k}+1\right)\le 0$，$f\left(\frac{1}{k}+1\right)=-\ln k\le 0$，得 $k\ge 1$

综上，$k\ge 1$ ………………8 分

(3)由(2)知，当 k=1 时，有 $f(x)\le 0$ 在 $(1,+\infty)$ 上恒成立，即 $\ln(x-1)<x-2$

令 $x-1=n^2\left(n\in N^*,n>1\right)$，得 $\ln n^2<n^2-1$，即 $\frac{\ln n}{n+1}<\frac{n-1}{2}$

$\frac{\ln 2}{3}+\frac{\ln 3}{4}+\frac{\ln 4}{5}+\cdots+\frac{\ln n}{n+1}<\frac{1}{2}+\frac{2}{2}+\frac{3}{2}+\cdots+\frac{n-1}{2}=\frac{n(n-1)}{4}$，得证………………12 分

22.解：(1)由 $\rho=6\sin\theta$ 得 $\rho^2=6\rho\sin\theta$，化为直角坐标方程为 $x^2+y^2=6y$，即 $x^2+(y-3)^2=9$.

所以圆 C 的直角坐标方程为 $x^2+(y-3)^2=9$. ………………5 分

(2)将 l 的参数方程代入圆 C 的直角坐标方程，得 $t^2+2(\cos\alpha-\sin\alpha)t-7=0$.

由已知得 $\Delta=(2\cos\alpha-2\sin\alpha)^2+4\times7>0$，所以可设 t_1，t_2 是上述方程的两根，

则 $\begin{cases}t_1+t_2=-2(\cos\alpha-\sin\alpha)\\ t_1t_2=-7\end{cases}$ 由题意得直线 l 过点(1,2)，结合 t 的几何意义得

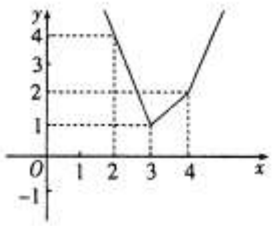
$|PA|+|PB|=|t_1|+|t_2|=|t_1-t_2|=\sqrt{32-4\sin 2\alpha}\ge 2\sqrt{7}$ ………………10 分

23.解：(1)当 $a=1$ 时，不等式即为 $2|x-3|+|x-4|<2$，

若 $x\ge4$，则 $3x-10<2$，$x<4$，∴舍去；

若 $3<x<4$，则 $x-2<2$，∴$3<x<4$；

若 $x\le3$，则 $10-3x<2$，∴$\frac{8}{3}<x\le3$.



综上，不等式的解集为 $\left\{x\middle|\frac{8}{3}<x<4\right\}$………………5 分

(2)设 $f(x)=2|x-3|+|x-4|$，则 $f(x)=\begin{cases}3x-10, & x\ge4,\\ x-2, & 3<x<4,\\ 10-3x, & x\le3.\end{cases}$ 作出函数 $f(x)$ 的图象，如图所示.

由图象可知，$f(x)\ge1$，∴$2a>1$，$a>\frac{1}{2}$，即 a 的取值范围为 $\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$. ………………10 分