

深圳市第二高级中学 2018-2019 学年度第四学段考试
高一数学试卷

(说明:本试卷考试时间为 120 分钟,满分为 150 分)

一、选择题(本大题共 12 小题,每题 5 分,共 60 分,每小题的 4 个选项中仅有一个选项是正确的,请将你认为正确的答案的代号涂在答题卡上)

1. 已知集合 $A = \{x | x^2 - x - 2 > 0\}$, 则 $\complement_{\mathbb{R}} A$ 等于(

- ~~A. $\{x | -1 < x < 2\}$~~ ~~B. $\{x | -1 \leq x \leq 2\}$~~ C. $\{x | x < -1\} \cup \{x | x > 2\}$ D. $\{x | x \leq -1\} \cup \{x | x \geq 2\}$

2. 若 $\frac{1}{a} < \frac{1}{b} < 0$, 则下列不等式中, 正确的不等式有

- ~~① $a + b < ab$~~ ~~② $|a| > |b|$~~ ~~③ $a < b$~~ ~~④ $\frac{b}{a} + \frac{a}{b} > 2$~~

- A. 1 个 B. 2 个 C. 3 个 D. 4 个

3. “ $\log_3(2x-3) < 1$ ” 是 “ $4^x > 8$ ” 的(

- A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
~~C. 充要条件~~ ~~D. 既不充分也不必要条件~~

4. 函数 $f(x) = 2^x - \frac{2}{x} - a$ 的一个零点在区间 $(1, 2)$ 内, 则实数 a 的取值范围是()

- A. $(1, 3)$ B. $(1, 2)$ C. $(0, 3)$ D. $(0, 2)$

5. 设 $\{a_n\}$ 是由正数组成的等比数列, 且 $a_5 a_6 = 81$, $\log_3 a_1 + \log_3 a_2 + \dots + \log_3 a_{10}$

的值是()

- A. 20 B. 10 C. 5 D. 2 或 4

6. $\triangle ABC$ 中, 已知 $(a+b+c)(b+c-a) = bc$, 则 A 的度数等于(

- ~~A. 30°~~ ~~B. 60°~~ C. 150° D. 120°

7. 设 $f(x) = \begin{cases} 2e^{x-1}, & x < 2 \\ \log_3(x^2 - 1), & x \geq 2 \end{cases}$, 则 $f(f(2))$ 的值为()

- A. 0 B. 1 C. 2 D. 3

8. $\triangle ABC$ 中, 若 $c = 2a \cos B$, 则 $\triangle ABC$ 的形状为(

- A. 直角三角形 B. 等腰三角形 C. 等边三角形 D. 锐角三角形

9. 一个等比数列的首项为 1, 公比为 2, 则 $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \dots + a_n^2 =$

- A. $(2^n - 1)^2$ B. $\frac{1}{3}(2^n - 1)$ C. $4^n - 1$ D. $\frac{1}{3}(4^n - 1)$

10. 函数 $f(x) = \cos\left(\omega x + \frac{\pi}{6}\right)$ ($\omega > 0$) 的最小正周期是 π , 则其图象向右平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位长度后对应函数的单调递减区间是(

~~A.~~ $\left[-\frac{\pi}{4}+k\pi, \frac{\pi}{4}+k\pi\right] (k \in \mathbb{Z})$

~~B.~~ $\left[\frac{\pi}{4}+k\pi, \frac{3\pi}{4}+k\pi\right] (k \in \mathbb{Z})$

C. $\left[\frac{\pi}{12}+k\pi, \frac{7\pi}{12}+k\pi\right] (k \in \mathbb{Z})$

~~D.~~ $\left[-\frac{5\pi}{12}+k\pi, \frac{\pi}{12}+k\pi\right] (k \in \mathbb{Z})$

11. 在等差数列 $\{a_n\}$ 中, 若 $S_4 = 1, S_8 = 4$, 则 $a_{17} + a_{18} + a_{19} + a_{20}$ 的值为(

A. 17

B. 16

C. 13

D. 9

12. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} x^2 - ax + 5, & x < 1 \\ 1 + \frac{1}{x}, & x \geq 1 \end{cases}$ 是 \mathbb{R} 上的减函数, 则实数 a 的取值范围为 ()

A. $(-\infty, 2]$

B. $[2, +\infty)$

C. $[2, 4]$

D. $[4, +\infty)$

二、填空题 (本大题共 4 小题, 每题 5 分, 共 20 分)

13. 已知数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 = 2, a_{n+1} = a_n + \frac{1}{2} (n \in \mathbb{N}^*)$, 则 a_{101} 的值为

14. 已知正实数 x, y 满足 $\frac{1}{y} + \frac{2}{x} = 1$, 则 $x + 2y$ 的最小值为 .

15. 两等差数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$, 前 n 项和分别为 S_n, T_n , 且 $\frac{S_n}{T_n} = \frac{7n+2}{n+3}$, 则 $\frac{a_2 + a_{20}}{b_7 + b_{15}}$ 等于 .

16. 给出下列命题:

①存在实数 α , 使 $\sin \alpha + \cos \alpha = 2$; ②函数 $y = \cos(\frac{\pi}{2} + x)$ 是偶函数;

③若 α, β 是第一象限的角, 且 $\alpha > \beta$, 则 $\sin \alpha > \sin \beta$;

④直线 $x = \frac{\pi}{8}$ 是函数 $y = \sin(2x + \frac{5\pi}{4})$ 的一条对称轴;

其中正确命题的序号是 .

三、解答题 (共 6 道大题, 满分 70 分, 其中第 17 题 10 分, 其余各题 12 分)

17. 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle A = 60^\circ$, $c = \frac{3}{7}a$.

(1) 求 $\sin C$ 的值;

(2) 若 $a = 7$, 求 $\triangle ABC$ 的面积.

18. 已知函数 $f(x) = \cos^2 x - \sin x \cos x - \frac{1}{2}$

(1) 求函数 $f(x)$ 在 $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ 上的值域;

(2) 若 $f(\alpha) = \frac{3\sqrt{2}}{10}$, 求 $\sin 4\alpha$ 的值.

19. 已知某公司生产某款手机的年固定成本为 40 万美元, 每生产 1 万只还需另投入 16 万美元. 设该公司一年内共生产该款手机 x 万只并全部销售完, 每万只的销售收入为 $R(x)$ 万美元,

$$\text{且 } R(x) = \begin{cases} 400 - 6x, & 0 < x \leq 40, \\ \frac{7400}{x} - \frac{40000}{x^2}, & x > 40. \end{cases}$$

(1) 写出年利润 W (万美元) 关于年产量 x (万只) 的函数解析式;

(2) 当年产量为多少万只时, 该公司在该款手机的生产中所获得的年利润最大? 并求出最大年利润.

20. 已知递增的等比数列 $\{a_n\}$ 满足: $a_2 + a_3 + a_4 = 28$, 且 $a_3 + 2$ 是 a_2 和 a_4 的等差中项.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 若 $b_n = a_n \log_2 a_n$, $S_n = b_1 + b_2 + \cdots + b_n$, 求 S_n .

21. 已知数列 $\{a_n\}$ 的各项均为正数, 前 n 项和为 S_n , 且 $a_n^2 + 2a_n = 4S_n + 3$.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 若 $b_n = \frac{1}{a_n a_{n+1}}$, 数列 $\{b_n\}$ 前 n 项和为 T_n , 求证: $\frac{1}{15} \leq T_n < \frac{1}{6}$.

22. 定义在 D 上的函数 $f(x)$, 如果满足: 对任意 $x \in D$, 存在常数 $M \geq 0$, 都有 $|f(x)| \leq M$

成立, 则称 $f(x)$ 是 D 上的有界函数, 其中 M 称为函数 $f(x)$ 的一个上界. 已知函数

$$f(x) = 1 + a\left(\frac{1}{2}\right)^x + \left(\frac{1}{4}\right)^x, g(x) = \log_{\frac{1}{2}} \frac{1-ax}{x-1}.$$

(1) 若函数 $g(x)$ 为奇函数, 求实数 a 的值;

(2) 在(1)的条件下, 求函数 $g(x)$, 在区间 $\left[\frac{5}{3}, 3\right]$ 上的所有上界构成的集合;

(3) 若函数 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上是以 3 为上界的有界函数, 求实数 a 的取值范围.