

## 高一数学 试题

数学试题卷共 6 页, 考试时间 120 分钟, 满分 150 分。

注意事项:

1. 答题前, 考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上。
2. 作答时, 务必将答案写在答题卡上, 写在本试卷及草稿纸上无效。
3. 考试结束后, 将本试卷、答题卡一并收回。

一、选择题: 本大题共 12 小题, 每小题 5 分, 共 60 分。在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的。请将正确答案的代号填涂在答题卡上。

1. 若  $\vec{a} = (x, 2)$ ,  $\vec{b} = (2, 1)$ ,  $\vec{a} \parallel \vec{b}$ , 则  $x$

- A. -1                      B. 1                      C. -4                      D. 4

2. 我国某城市 2019 年 4 月的空气质量状况统计如下表所示:

污染指数 $T$	30	60	100	110	130	140
天数	3	5	10	7	4	1

当  $T \leq 50$  时, 空气质量为优; 当  $50 < T \leq 100$  时, 空气质量为良; 当  $100 < T \leq 150$  时, 空气质量为轻微污染。该城市 2019 年 4 月空气质量达到良或优的概率为

- A.  $\frac{3}{5}$                       B.  $\frac{1}{180}$                       C.  $\frac{1}{19}$                       D.  $\frac{5}{6}$

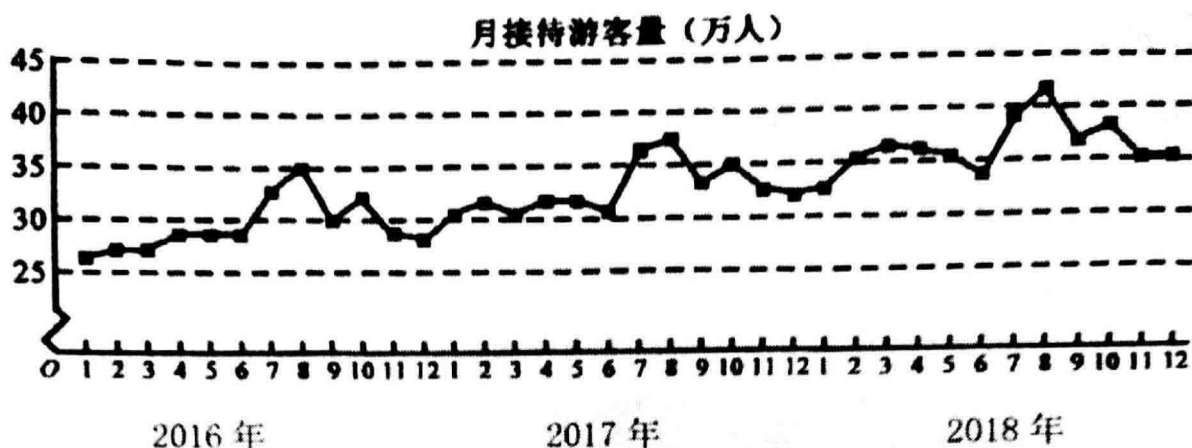
3. 把红、蓝、黑、白 4 张纸牌随机分给甲、乙、丙、丁 4 个人, 每人分得一张, 事件“甲分得红牌”与事件“乙分得红牌”是

- A. 对立事件                      B. 必然事件  
C. 互斥但不对立事件                      D. 不可能事件

4. 在  $\triangle ABC$  中,  $a, b, c$  分别是内角  $A, B, C$  的对边, 且  $c^2 = a^2 + b^2 - \sqrt{2}ab$ , 则角  $C$  的大小为

- A.  $\frac{\pi}{4}$                       B.  $\frac{\pi}{3}$                       C.  $\frac{3\pi}{4}$                       D.  $\frac{2\pi}{3}$

5. 某景点为了了解游客人数的变化规律, 提高旅游服务质量, 收集并整理了2016年1月至2018年12月期间月接待游客量(单位: 万人)的数据, 绘制了下面的折线图:



根据该折线图, 下列结论正确的是

- A. 各年1月至8月月接待游客量逐月增加  
 B. 各年8月至12月月接待游客量逐月递减  
 C. 各年的月接待游客量最低峰期在12月  
 D. 各年1月至6月的月接待游客量相对于7月至12月, 波动性更小, 变化比较平稳
6. 设等差数列 $\{a_n\}$ 的前 $n$ 项和为 $S_n$ , 若 $a_1 = 11$ ,  $a_4 + a_6 = 6$ , 当 $S_n$ 取最大值时, 则 $n =$
- A. 5                      B. 6                      C. 7                      D. 8
7. 从分别写有1, 2, 3, 4的4张卡片中随机抽取1张, 放回后再随机抽取1张, 则抽得的第一张卡片上的数小于第二张卡片上的数的概率为
- A.  $\frac{1}{8}$                       B.  $\frac{1}{4}$                       C.  $\frac{3}{8}$                       D.  $\frac{1}{2}$
8. 已知 $S_n$ 是数列 $\{a_n\}$ 的前 $n$ 项和,  $\log_3 S_n = n (n \in \mathbb{N}^*)$ , 则数列 $\{a_n\}$ 是
- A. 公比为3的等比数列                      B. 公差为3的等差数列  
 C. 公比为 $\frac{1}{3}$ 的等比数列                      D. 既非等差数列, 也非等比数列
9. 已知同一平面内的向量 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ 满足 $|\vec{a}| = 2, |\vec{b}| = 2, |\vec{c}| = 3$ , 且 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ 两两所成的角相等, 则

$|\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}|$  等于

- A.  $\sqrt{17}$  或 1                      B.  $\sqrt{17}$  或  $\sqrt{3}$                       C. 7 或 1                      D. 7 或  $\sqrt{3}$

10. 已知数列  $\{a_n\}$  为:  $\frac{1}{2}, \frac{1}{3} + \frac{2}{3}, \frac{1}{4} + \frac{2}{4} + \frac{3}{4}, \frac{1}{5} + \frac{2}{5} + \frac{3}{5} + \frac{4}{5}, \dots$ , 那么数列  $\left\{\frac{1}{a_n a_{n+1}}\right\}$  的前  $n$  项和为( )

A.  $4\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)$

B.  $4\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n+1}\right)$

C.  $1 - \frac{1}{n+1}$

D.  $\frac{1}{2} - \frac{1}{n+1}$

11. 已知  $A, B, C$  三点共线, 且  $3\overrightarrow{OA} = a_5\overrightarrow{OB} + a_7\overrightarrow{OC}$ , 其中  $a_5, a_7$  是各项都为正数的等差数列  $\{a_n\}$  中的两项, 则  $\frac{1}{a_2} + \frac{2}{a_{10}}$  的取值范围为

A.  $[3 + 2\sqrt{2}, +\infty)$

B.  $\left[1 + \frac{2\sqrt{2}}{3}, +\infty\right)$

C.  $[4, +\infty)$

D.  $\left[\frac{4}{3}, +\infty\right)$

12. 在锐角  $\triangle ABC$  中,  $a, b, c$  分别是角  $A, B, C$  的对边,  $a = b \cos C + \frac{\sqrt{3}}{3} c \sin B$ , 且

$b = \sqrt{3}$ , 则  $a^2 + c^2$  的取值范围为

A.  $(3, 6]$

B.  $(5, 6]$

C.  $[3, 6]$

D.  $(3, 5)$

二、填空题: 本大题 4 个小题, 每小题 5 分, 共 20 分, 把答案填写在答题卡相应的位置上.

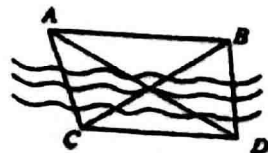
13. 已知  $|\vec{a}| = 2$ ,  $\vec{a}$  与  $\vec{e}$  的夹角  $\theta = \frac{\pi}{3}$ , 则  $\vec{a}$  在  $\vec{e}$  方向上的投影为\_\_\_\_\_.

14. 某国产芯片车间为了规定工时定额, 需要确定加工零件所花费的时间, 为此进行了 5 次试验. 根据收集到的数据(如下表), 用最小二乘法求得线性回归方程为:  $\hat{y} = 0.62x + 46.4$ .

零件数 $x$ (个)	10	20	30	40	50
加工时间 (min)	52	████████	65	70	78

现发现表中有一个数据模糊不清, 则该数据的值为\_\_\_\_\_.

15. 在“某世界园艺博览会”园区内, 北京园在  $A$  处, 重庆园在  $B$  处, 现要测量  $A$  与  $B$  之间的距离, 在河对岸选取相距  $\sqrt{3} \text{ km}$  的  $C, D$  两点, 并测得  $\angle ACB = 75^\circ$ ,  $\angle ADC = 30^\circ$ ,  $\angle BCD = \angle ADB = 45^\circ$ , 则  $A$  与  $B$  之间的距离为 \_\_\_\_\_  $\text{ km}$ .



16. 已知  $a > 0, b > 0$ , 下面四个结论:

①  $\frac{2ab}{a+b} \leq \frac{a+b}{2}$ ; ②  $\frac{a+b}{2} > \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$ ; ③ 若  $a > b$ , 则  $\frac{c^2}{a} \leq \frac{c^2}{b}$ ;

④ 若  $\frac{1}{a+1} + \frac{1}{b+1} = 1$ , 则  $a+2b$  的最小值为  $2\sqrt{2}$ ;

其中正确结论的序号是\_\_\_\_\_。(把你认为正确的结论的序号都填上)

三、解答题: 本大题共 70 分, 解答时应写出必要的文字说明、演算步骤或推理过程, 并答在答题卡相应的位置上.

17. (本小题满分 10 分, (I) 小问 5 分, (II) 小问 5 分)

已知  $\{a_n\}$  为等差数列, 且  $a_3 = -6, a_6 = 0$ .

(I) 求  $\{a_n\}$  的通项公式;

(II) 若等比数列  $\{b_n\}$  满足  $b_1 = -8, b_2 = a_1 + a_2 + a_3$ , 求  $\{a_n + b_n\}$  的前  $n$  项和.

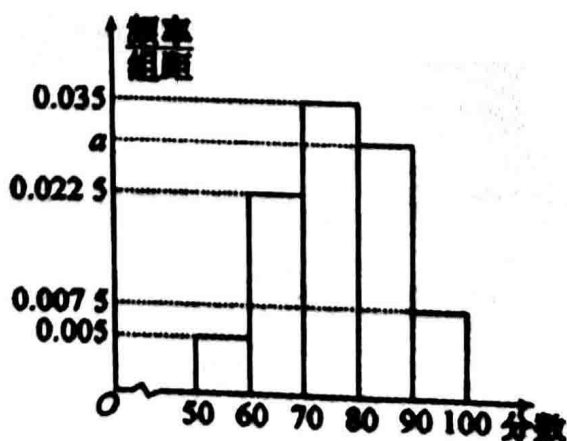
18. (本小题满分 12 分, (I) 小问 4 分, (II) 小问 8 分)

把某校  $n$  名学生的一次考试成绩(单位: 分)分成 5 组得到的频率分布直方图如图所示,

其中落在  $[80, 90)$  内的频数为 180.

(I) 请根据图中所给数据, 求出本次考试成绩的中位数(保留一位小数);

(II) 从这 5 组中按分层抽样的方法选取 40 名学生的成绩作为一个样本, 在  $[50, 60)$  与  $[90, 100]$  内的样本中, 再随机抽取两名学生的成绩, 求所抽取两名学生成绩的平均分不低于 70 分的概率.



19. (本小题满分 12 分, (I) 小问 9 分, (II) 小问 3 分)

2019 年 4 月 25 日至 27 日, 第二届“一带一路”国际合作高峰论坛在北京举行. 这几年全球“一带一路”项目建设投入资金逐年增长, 2014 年至 2018 年投入资金统计如下表:

年份	2014	2015	2016	2017	2018
时间 $t$ 代号	1	2	3	4	5
投入资金 $y$ (万亿元)	2	3	5	7	8

(I) 求  $y$  关于  $t$  的线性回归方程  $\hat{y} = \hat{a} + \hat{b}t$ ;

(II) 用所求线性回归方程预测 2019 年的“一带一路”项目建设投入资金.

附: 回归方程  $\hat{y} = \hat{a} + \hat{b}t$  中

$$\begin{cases} \hat{b} = \frac{\sum_{i=1}^n (t_i - \bar{t})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^n (t_i - \bar{t})^2} = \frac{\sum_{i=1}^n t_i y_i - n\bar{t}\bar{y}}{\sum_{i=1}^n t_i^2 - n\bar{t}^2} \\ \hat{a} = \bar{y} - \hat{b}\bar{t} \end{cases}$$

20. (本小题满分 12 分, (I) 小问 4 分, (II) 小问 8 分)

在  $\triangle ABC$  中, 角  $A, B, C$  所对的边分别为  $a, b, c$ , 且  $2a \cos A = c \cos B + b \cos C$ .

(I) 求角  $A$  的大小;

(II) 若  $a = 3$ , 求  $\triangle ABC$  周长的取值范围和面积的最大值.

21. (本小题满分 12 分, (I) 小问 5 分, (II) 小问 7 分)

已知点  $O(0,0)$ ,  $A(-1,0)$ ,  $B(1,m)$ ,  $C(x,x^2)$ , 设  $f(x) = \overline{AC} \cdot \overline{OB}$ .

(I) 若不等式  $f(x) > -2x^2 - 3x - m + 2$  对一切实数  $x$  恒成立, 求实数  $m$  的取值范围;

(II) 若  $m \in R$ , 解不等式  $f(x) < mx + 2$ .

22. (本小题满分 12 分, (I) 小问 5 分, (II) 小问 7 分)

已知数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和为  $S_n$ , 对任意的  $n \in N^*$ ,  $2S_n + 4 = 3a_n + 2n$  恒成立.

(I) 设  $b_n = a_n - 1$ , 求证: 数列  $\{b_n\}$  为等比数列;

(II) 设  $c_n = \frac{\log_3(a_{n+1} - 1)}{a_{n+1} - 1}$ , 数列  $\{c_n\}$  的前  $n$  项和为  $T_n$ , 求证:  $\frac{1}{3} \leq T_n < \frac{3}{4}$ .