重庆市育才中学2018-2019学年下学期高2021级期末考试

数学试题

注意事项：

1. 答卷前，考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上。
2. 作答时，务必将答案写在答题卡上。写在本试卷及草稿纸上无效。
3. 考试结束后，将答题卡交回。

一、选择题：本题共12小题，每小题5分，共60分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1．若直线 $x+ay-2=0$ 和 $x+y=0$ 互相垂直，则 $a=$

A．-1　　B．0　　C．1　　D．2

2．已知等差数列 $\{a_n\}$ 的前5项和为 $S_5=15$，则 $a_3=$

A．1　　B．2　　C．3　　D．4

3．已知平面向量 $\boldsymbol{a}=(1,x)$，$\boldsymbol{b}=(2,1-x)$，$\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$，则 $x=$

A．-1　　B．$-\frac{1}{3}$　　C．$\frac{1}{3}$　　D．2

4．已知实数 a、b 满足 $a>b$，则下列不等式中恒成立的是

A．$a^2>ab$　　B．$2^a>2^b$　　C．$a+b\geq 2\sqrt{ab}$　　D．$\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$

5．已知点 $A(2,2)$，$B(-1,1)$，若直线 l：$kx-y-k=0$ 与线段 AB（含端点）相交，则 k 的取值范围为

A．$\left(-\infty,-\frac{1}{2}\right]\cup[2,+\infty)$　　B．$\left[-\frac{1}{2},2\right]$　　C．$(-\infty,-2]\cup\left[\frac{1}{2},+\infty\right)$　　D．$\left[-2,\frac{1}{2}\right]$

6．已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=4$，$a_{n+1}=a_n-2$，则 $|a_1|+|a_2|+\cdots+|a_{21}|=$

A．336　　B．348　　C．492　　D．516

7．若双曲线 $x^2-y^2=m$ 的一个焦点与抛物线 $x^2=y$ 的焦点重合，则实数 $m=$

A．$-\frac{1}{8}$　　B．$-\frac{1}{32}$　　C．$\frac{1}{32}$　　D．$\frac{1}{8}$

8．设数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=2$，$a_n=1-\frac{1}{a_{n+1}}$，记 $\{a_n\}$ 前 n 项之积为 T_n，则 $T_{2021}=$

A．-2　　B．-1　　C．1　　D．2

9．圆 $x^2+y^2-4x-4y+m=0$ 上动点 P 到直线 $x+y+2=0$ 的最小距离为 $2\sqrt{2}$，则 $m=$

A．-10　　B．-6　　C．6　　D．10

10. 已知非零实数 a、b 和1成等差数列，直线 $ax+by+1=0$ 与椭圆 C：$\frac{x^2}{m}+\frac{y^2}{10}=1$ 恒有公共点，则实数 m 的取值范围为

A. $m>\frac{3}{5}$　　B. $m\geq\frac{3}{5}$　　C. $m>\frac{5}{3}$　　D. $m\geq\frac{5}{3}$

11. 已知各项都为正数的等比数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_7=a_6+2a_5$，存在两项 a_m、a_n，使得 $\lg a_m+\lg a_n=4\lg 2+2\lg a_1$，则 $\frac{1}{m}+\frac{4}{n}$ 的最小值为

A. $\frac{3}{2}$　　B. $\frac{5}{3}$　　C. $\frac{25}{6}$　　D. $\frac{9}{2}$

12. 已知 F_1、F_2 是双曲线 C：$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的左、右焦点，若其中一条渐近线上存在关于原点 O 对称的两点 P、Q，四边形 PF_1QF_2 为矩形，且面积为 $2\sqrt{2}b^2$，则双曲线离心率 e 为

A. 4　　B. $2\sqrt{2}$　　C. 2　　D. $\sqrt{2}$

二、填空题：本题共4小题，每小题5分，共20分。

13. 已知向量 $|\overrightarrow{OA}|=|\overrightarrow{OB}|=1$，$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=\frac{1}{2}$，则 $\angle AOB=$________。

14. 若圆 C_1：$(x-1)^2+(y+\sqrt{3})^2=1$ 与圆 C_2：$(x-a)^2+y^2=1$ 没有公共点，则实数 m 的取值范围是________。

15. 在 ΔABC 中，角 A，B，C 所对的边分别为 a，b，c，且角 C 为钝角，若 ΔABC 的面积为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$，$ab=2$，$c=\sqrt{7}$，则 $a+b=$________。

16. 定义在 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ 上的函数 $f(x)$，如果对于任意给定的等比数列 $\{a_n\}$，$\{f(a_n)\}$ 仍是等比数列，则 $f(x)$ 称为“保等比数列函数”。现有定义在 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ 上的如下函数：① $f(x)=x^3$；② $f(x)=e^x$；③ $f(x)=\sqrt{|x|}$；④ $f(x)=\log_2|x|$。

则其中是“保等比数列函数”的 $f(x)$ 的序号为________。

三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. （12 分）

已知$\{a_n\}$是首项为$-\sqrt{3}$、公比$q<0$的等比数列，且满足a_1、$a_3-2\sqrt{3}$、a_5成等差数列。

（Ⅰ）求$\{a_n\}$的通项公式；

（Ⅱ）设$b_n=a_{2n}+\log_3 a_{2n}$，求数列$\{b_n\}$的前n项和S_n。

18. （12 分）

在ΔABC中，a、b、c分别是角A、B、C的对边，已知向量$\vec{m}=\left(\sin\left(A+\frac{\pi}{3}\right),a\right)$，

$\vec{n}=\left(b,\cos\left(\frac{\pi}{2}+B\right)\right)$，且$\vec{m}\perp\vec{n}$。

（Ⅰ）求角A的值；

（Ⅱ）若$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CA}=-12$，求边$a$的最小值。

19. （12 分）

已知以点$C(-1,1)$为圆心的圆C与直线l：$2x+y-4=0$交于A、B两点，$|AB|=2\sqrt{5}$。

（Ⅰ）求圆C的标准方程；

（Ⅱ）平面内一动点P满足ΔABP是直角三角形，且$\angle APB=\frac{\pi}{2}$，求点P的轨迹方程。

20. （12 分）

已知过定点$F(0,1)$，且与直线l_1：$y=-1$相切的动圆圆心为C。

（Ⅰ）求圆心C的轨迹方程E；

（Ⅱ）过点F作直线l_2与轨迹E交于P、Q两点，交直线l_1于点R，PQ中点记为M，求$\overrightarrow{MR}\cdot\overrightarrow{FR}$的最小值。

21．（12分）

已知数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，且满足$S_n=n+2-a_n\left(n\in N^*\right)$。

（Ⅰ）求证：数列$\{a_n-1\}$为等比数列，并求数列$\{a_n\}$的通项公式；

（Ⅱ）若数列$\{b_n\}$满足$b_n\cdot a_n\cdot a_{n+1}=\left(\frac{1}{2}\right)^n\left(n\in N^*\right)$，$\{b_n\}$的前$n$项和为$T_n$，求证：$T_n<\frac{2}{3}$。

22．（10分）

已知点C为圆$x^2+y^2=1$上一点，$CA\perp x$轴于点A，$CB\perp y$轴于点B，点P满足$\overrightarrow{OP}=2\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$（$O$为坐标原点），点$P$的轨迹为曲线$E$。

（Ⅰ）求E的方程；

（Ⅱ）斜率为$\frac{\sqrt{3}}{2}$的直线l交曲线E于不同的两点M、N，是否存在定点T，使得直线TM、TN的斜率之和恒为0。若存在，则求出点T的坐标；若不存在，则请说明理由。