

2018 学年第一学期期末考试高一年级

数学试卷

考生注意：

1. 每位考生应同时收到试卷和答题纸两份材料，解答必须在答题纸上进行，写在试卷上的解答律无效；

2. 答卷前，考生务必将姓名、学号等在答题纸密封线内相应位置填写清楚；

3. 本试卷共 21 道试题，满分 150 分，考试时间 90 分钟。

一、填空题（本大题满分 54 分），本大题共有 12 小题，只要求直接填写毕要，前 6 题每题 4 分，后 6 题每题 5 分。

1. 函数 $f(x) = x^2 - 3x + 2$ 的零点之和为_____。

2. 设集合 $A = \{4, \log_2(a+3)\}$ ，集合 $B = \{a, b\}$ ，若 $A \cap B = \{3\}$ ，则在 $A \cup B =$ _____。

3. 设 $A = \{x \mid x^2 - 3x + 2 \leq 0\}$ ， $B = (-\infty, n]$ ，如果 $A \cap B = \emptyset$ ，则实数 n 的取值范围是_____。

4. 已知二次函数 $y = ax^2 + ax + 3$ 图像永远在横轴上方，则实数 a 的取值范围为_____。

5. 设函数 $f(x) = \begin{cases} 2x + a, & x \geq 4 \\ ax - 17, & x < 4 \end{cases}$ 的反函数是 $f^{-1}(x)$ ，若 $f^{-1}(3) = 4$ ，则实数 $a =$ _____。

6. 若 $\lg x - \lg \frac{1}{y} = 2$ ，则 $\frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ 的最小值_____。

7. 幂函数 $f(x) = (k-1) \cdot x^{\frac{1}{k}}$ (k 是常数, $k \in \mathbf{Q}$) 在区间 $[0, 4]$ 上的值域为_____。

8. 已知函数 $f(x) = \frac{x}{x-1} (x > 1)$ ， $g(x) = \frac{x-1}{\sqrt{x}} (x \geq 2)$ ，若存在函数 $F(x), G(x)$ 满足：

$$F(x) = |f(x)| \cdot g(x), \frac{G(x)}{f(x)} = |g(x)|$$

学生甲认为函数 $F(x), G(x)$ 一定是同一函数，乙认为函数 $F(x), G(x)$ 一定不是同一函数，丙认为函数 $F(x), G(x)$ 不一定是同一函数，观点正确的学生是_____。

9. 写出命题“若 $x = -1$ 且 $y = -1$ ，则 $x + y = -2$ ”的逆否命题：_____。

10. 已知区间 $(0, +\infty)$ 为函数 $f(x) = ax + \frac{b}{x}$ ($a, b \in R, b \neq 0$) 的单调递增区间, 则 a, b 满足的条件是_____.

11. 已知函数 $f(x) = \frac{4}{3^{x-1} - 3}$ 具有对称中心为 P , 则点 P 的坐标为_____.

12. 已知函数 $f(x) = |x+1| + |x-2|$, $g(x) = |x+1| - |x-2|$, 若存在实数 n , 使得不等式 $g(x-2) + n \leq f(x)$ 对于任意 $x \in R$ 的恒成立, 则 n 的最大值是_____.

二、选择题 (本大题满分 20 分) 本大题共有 4 题, 每题都给出四个结论, 其中有且只有一个结论是正确的, 每题选对得 5 分。

13. 德国数学家希尔伯特说: “谁也不把我们为我们创造的花园中赶走”, 赞赏在 1871 年提出了集合论的某位数学家 (划线部分所示), 请问是下列哪位数学家 ()

- (A) 德·摩根 (B) 高斯
(C) 欧拉 (D) 康托尔

14. 请问下列集合关系式: (1) $0 \in \emptyset$ (2) $\emptyset \subseteq \{0\}$ (3) $\{0\} \subseteq N$ 中, 正确的个数是 ()

- (A) 0 (B) 1
(C) 2 (D) 3

15. 若函数 $y = f(x)$ 存在反函数 $y = f^{-1}(x)$, 则函数 $y = f(x)$ 和 $y = f^{-1}(x)$ ()

- (A) 不能关于原点对称 (B) 单调性不可能相反
(C) 不可能同时是奇函数 (D) 如果图像存在交点, 则交点一定在 $y = x$ 直线

16. 已知函数 $f(x)$ 的定义域 A , 值域是 $B = [a, b]$; $g(x)$ 定义域 C , 值域是 $D = [c, d]$, 其中实数 a, b, c, d , 满足 $a < b, c < d$

甲: 如果任意 $x_1 \in A$, 存在 $x_2 \in C$, 使得 $f(x_1) = g(x_2)$, 那么 $B \subseteq D$

乙: 如果存在 $x_1 \in A$, 存在 $x_2 \in C$, 使得 $f(x_1) = g(x_2)$, 那么 $B = D$,

丙：如果任意 $x_1 \in A$ ，任意 $x_2 \in C$ ，使得 $f(x_1) = g(x_2)$ ，那么 $B = D$

丁：如果存在 $x_1 \in A$ ，任意 $x_2 \in C$ ，使得 $f(x_1) = g(x_2)$ ，那么 $b > d$ ，

请判断上述四个命题中，假命题的个数是 ()

- (A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3

三、解答题（本大题满分 76 分）本大题共有 5 题，解答下列各题必须写出必要的步骤，

17.（本题满分 14 分）

已知两个正数 x, y ，证明：这两个正数的算术平均数不小于这两个正数的几何平均数，并指出何时相等.

18.（本题满分 14 分），本题共有 2 个小题，第一小题 6 分，第二小题 8 分.

设 $a \in R$ ，函数 $f(x) = \frac{2^x + a}{2^x + 1}$.

(1) 求 a 的值，使得 $f(x)$ 为奇函数； (2) 若 $a \leq 1$ 且 $f(x) < \frac{a+2}{2}$ 对任意 $x \in R$ 均成立，求 a 的取值范围.

19.（本题满分 14 分）本题共有 2 个小题，第 1 小题 6 分，第 2 小题 8 分.

已知存在常数 $a > 0$ ，那么函数 $f(x) = x + \frac{a}{x}$ 在 $(0, \sqrt{a}]$ 上是减函数，在 $[\sqrt{a}, +\infty)$ 上是增函数，再由函数的奇偶性可知在 $(-\infty, -\sqrt{a}]$ 上是增函数，在 $[-\sqrt{a}, 0)$ 上是减函数

(1) 判断函数 $g(x) = x^2 + \frac{a}{x^2}$ 的单调性，并证明：

(2) 将前述的函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 推广为更为一般形式的函数 $h(x)$ ，使 $f(x)$ 和 $g(x)$ 都是 $h(x)$ 的特例，研究 $h(x)$ 的单调性（只须归纳出结论，不必推理证明）

20.（本题满分 16 分）本题共有 3 个小题，第 1 小题 4 分，第 2 小题 6 分，第 3 小题 6 分.

2018 年 8 月 31 日下午，关于修改个人所得税法的决定经十三届全国人大常委会第五次会议表决通过。2018 年 10 月 1 日起施行最新起征点和税率。个税起征点提高至每月 5000 元。

设个人月应纳税所得额为 x 元，个人月工资收入为 A 元，三险一金（养老保险、失业保险、医疗保险、住房公积金）及其它各类免税额总计为 B 元，则 $x = A - B - 5000$. 设月应纳税额为 $f(x)$ ，个税的计算方式一般是分级计算求总和（如图表所示，共分 7 级）。

比如：小陈的应纳税所得额为 $x_1 = 20000$ 元，月应缴纳税额为

$$f(x_1) = 3000 \cdot 3\% + 9000 \cdot 10\% + 8000 \cdot 20\% = 2590 \text{ 元}$$

税级	月应纳税所得额 x	税率
1	x 中不超过 3000 元的部分	3%
2	x 中超过 3000 元至 12000 元（含 12000 元）的部分	10%
3	x 中超过 12000 元至 25000 元（含 25000 元）的部分	20%
4	x 中超过 25000 元至 35000 元（含 35000 元）的部分	25%
5	x 中超过 35000 元至 55000 元（含 55000 元）的部分	30%
6	x 中超过 55000 元至 80000 元（含 80000 元）的部分	35%
7	x 中超过 80000 元的部分	45%

(1) 小王的应纳税所得额 $x_2 = 30000$ 元，求 $f(x_2)$ ；

(2) 小张的应纳税所得额 x_3 元，若 $f(x_3) = 8010$ 元，求 x_3 ；

(3) 当 $x > 35000$ 时，写出 $f(x)$ 的解析式（请写成分段函数的形式）。

21. (本题满分 18 分) 本题共有 3 个小题，第 1 小题满分 4 分，第 2 小题满分 7 分，第 3 小题满分 7 分)

已知 $a \in \mathbb{R}$ ，函数 $f(x) = \left(\frac{1}{x} + a\right)^k$ ($k \in \mathbb{Q}$)。

(1) 当 $a = 3$ 且 $k = 1$ 时，解不等式 $|f(x)| > 1$ ；

(2) 当 $k = 2$ 时, 将函数 $f(x)$ 在区间 $[1, 2]$ 的最小值表示为函数 $h(a)$, 求函数 $h(a)$ 的最小值;

(3) 当 $k = -\frac{1}{2}$ 时, 若关于 x 的方程 $f(x) = \frac{1}{\sqrt{(a-3)x + 2a - 4}}$ 的解集中恰有一个元素, 求 a 的取值范围.