

2018~2019 学年度上学期友好学校期末联考试题·高一数学(理科)

参考答案、提示及评分细则

1. C

2. C $x+3>0$ 且 $x+1\neq 0, x>-3$ 且 $x\neq -1$.

3. A

4. D 根据题意, 由于 m, n 是两条不同的直线, α, β 是两个不同的平面. 对于选项 A, 由 $\alpha \perp \beta, m \subseteq \alpha$, 知只有直线 m 垂直于交线时, 才可以得到线面垂直, 故错误; 对于 B, 由于 $m \perp \alpha, \alpha \perp \beta$, 则可知 m 可能在平面 β 内, 故错误; 对于 C, 由于 $m \perp n, n \subseteq \beta$, 则只有垂直于两条相交直线时成立, 故错误; 对于 D, 由于 $m \parallel n, n \perp \beta$, 根据平行的传递性, 得到 $m \perp \beta$, 故选 D.

5. B 圆 $C: (x-1)^2 + (y+3)^2 = 9, \therefore |OP|_{\min} = \sqrt{1^2 + 3^2} - 3 = \sqrt{10} - 3$.

6. C $y = a^x$ 与 $y = \log_a x$, 当 $0 < a < 1$ 时, 是减函数, 当 $a > 1$ 时, 是增函数, 又 $\log_3 3 < \log_2 3$, 排除 D.

7. B $-\frac{3m-1}{2} \geq 2, m \leq -1$.

8. B 该几何体为正棱台的三视图, $S_{\text{上底}} = 4, S_{\text{下底}} = 16, V_{\text{棱台}} = \frac{1}{3} \times (4 + \sqrt{4 \times 16} + 16) \times 1 = \frac{28}{3}$.

9. A \because 函数 $f(x)$ 是幂函数, $\therefore m-2=1, m=3, \therefore g(x) = \log_a(x+3)$ 过定点 $(-2, 0)$.

10. A $V_{P-ABC} = \frac{1}{3} \times 2 \times 2 \times PA = \frac{2}{3} PA = \frac{4\sqrt{3}}{3}$, 得 $PA = 2\sqrt{3}, (2R)^2 = 4 + 4 + (2\sqrt{3})^2$, 有 $R = \sqrt{5}, V_{\text{球}} = \frac{20}{3}\sqrt{5}\pi$.

11. B 由题知圆心到直线距离为 1, B 满足.

12. C 由 $f(x)$ 在 $(-2, -1)$ 上是减函数, 得 $\frac{1}{a} \leq -2$, 且 $a+2-2a-2 \geq 0$, 又 $a \neq 0, a \neq -1, \therefore -\frac{1}{2} \leq a < 0$ 又

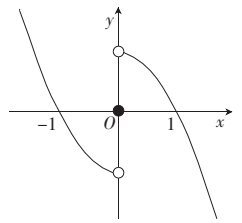
$g(x)$ 有最大值, $\therefore 8^{\frac{1}{3}} \geq \log_{|a|} \frac{1}{3}, |a| \leq \frac{\sqrt{3}}{3}, \therefore a \in \left[-\frac{1}{2}, 0\right)$

13. $\left(\frac{29}{13}, \frac{2}{13}\right)$

14. 10

15. $4\sqrt{10}$ 两圆方程相减可得公共弦直线方程 l 为 $x+3y+10=0$, 圆 $x^2+y^2+10x+10y=0$ 的圆心到 l 的距离为 $\frac{|-5-15+10|}{\sqrt{10}} = \sqrt{10}, \therefore$ 公共弦长为 $2\sqrt{(5\sqrt{2})^2 - \sqrt{10}^2} = 4\sqrt{10}$.

16. $[-1, 0] \cup \{1\}$ 由题意有 $f(0) = 0, f(-1) = f(1) = 0$, 当 $x \in (0, +\infty)$ 时, 函数 $f(x)$ 单调递减; 当 $x \in (-\infty, 0)$ 时, 函数 $f(x)$ 单调递增, 则函数 $f(x)$ 的图象的大概趋势如右图所示:



由 $2^{x-1} - 1 \geq 0$ 可得 $x \geq 1$,

- ① 当 $x = 0$ 或 1 时, $(2^{x-1} - 1)f(x) = 0$, 符合题意;
- ② 当 $x > 1$ 时, $f(x) < 0, (2^{x-1} - 1)f(x) < 0$, 不符合题意;
- ③ 当 $0 < x < 1$ 时, $f(x) > 0, (2^{x-1} - 1)f(x) < 0$, 不符合题意;
- ④ $x < 0$ 时, $2^{x-1} - 1 < 0$, 使得 $(2^{x-1} - 1)f(x) \geq 0$, 只需要 $f(x) \leq 0$, 可得 $-1 \leq x < 0$.

由上知满足 $(2^{x-1} - 1)f(x) \geq 0$ 的实数 x 的取值范围为 $[-1, 0] \cup \{1\}$.

17. 解: (1) $a = 1$ 时, $A = \{x | -1 < x < 4\}$,

$$\because B = \{x | 3 < x < 5\}, \therefore A \cup B = \{x | -1 < x < 5\};$$

$$\complement_U A = \{x | x \leq -1 \text{ 或 } x \geq 4\}, \therefore (\complement_U A) \cap B = \{x | 4 \leq x < 5\}. \dots\dots\dots 5 \text{ 分}$$

$$(2) \because \text{非空集合 } A = \{x | a - 2 < x < 3a + 1\}, \therefore 3a + 1 > a - 2, \therefore a > -\frac{3}{2},$$

$$\complement_U A = \{x | x \leq a - 2 \text{ 或 } x \geq 3a + 1\},$$

$$\because (\complement_U A) \cap B = B, \therefore B \subseteq \complement_U A, \therefore a - 2 \geq 5, \text{ 或 } 3a + 1 \leq 3, \therefore a \geq 7 \text{ 或 } a \leq \frac{2}{3},$$

$$\therefore a \text{ 的取值范围是 } (-\frac{3}{2}, \frac{2}{3}] \cup [7, +\infty). \dots\dots\dots 10 \text{ 分}$$

18. 解: (1) 因为函数 $f(x)$ 是定义域在 \mathbf{R} 上的奇函数且 $f(x) = x - \sqrt{x} (x \geq 0)$, 所以 $f(0) = 0, f(1) = 0, f(4) = 4 - 2 = 2$

$$f(-1) = -f(1) = 0, f(-4) = -f(4) = -2, \therefore f(0) + f(-1) + f(-4) = -2. \dots\dots\dots 3 \text{ 分}$$

(2) 当 $x < 0$, 则 $-x > 0$,

$$f(-x) = -x - \sqrt{-x} = -f(x), \therefore f(x) = x + \sqrt{-x}, (x < 0). \dots\dots\dots 4 \text{ 分}$$

$$\text{故 } f(x) = \begin{cases} x - \sqrt{x}, & x \geq 0 \\ x + \sqrt{-x}, & x < 0 \end{cases}. \dots\dots\dots 7 \text{ 分}$$

(3) 当 $x > 4$ 时, $f(x) > 2$; 当 $1 \leq x \leq 4, f(x) = x - \sqrt{x} \in [0, 2]$; 当 $0 \leq x \leq 1, f(x) = x - \sqrt{x} \in [-\frac{1}{4}, 0]$.

由奇函数图象关于原点对称及 $-2 \leq f(x) \leq 0$ 得 $x \in [-4, -1] \cup [0, 1]$ 12 分

19. 证明: (1) 因为 $DF=2FC, BE=2EC$, 所以 $\frac{CF}{FD} = \frac{CE}{BE} = \frac{1}{2}$,

所以 $BD \parallel EF$ 3 分

因为 $EF \subset$ 平面 $AEF, BD \not\subset$ 平面 AEF ,

所以 $BD \parallel$ 平面 AEF 5 分

(2) 因为 $AE \perp$ 平面 $BCD, CD \subset$ 平面 BCD ,

所以 $AE \perp CD$ 7 分

因为 $BD \perp CD, BD \parallel EF$, 所以 $CD \perp EF$, 9 分

又 $AE \cap EF = E$, 所以 $CD \perp$ 平面 AEF 10 分

又 $CD \subset$ 平面 ACD , 所以平面 $AEF \perp$ 平面 ACD 12 分

20. 解: (1) \because 由 $\frac{3}{2} + \sqrt{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} + n = 0, \therefore n = -3$

过点 $(\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$ 与直线 $x + \sqrt{3}y + n = 0$ 垂直的直线方程为 $\sqrt{3}x - y - \sqrt{3} = 0$,

当 $y = 0$ 时, $x = 1$, 得 $C(1, 0)$, 圆 C 半径为 $\sqrt{(\frac{3}{2} - 1)^2 + (\frac{\sqrt{3}}{2})^2} = 1$

\therefore 圆 C 的方程为 $(x - 1)^2 + y^2 = 1$ 6 分

(2) $\because C(1, 0), M(0, 2\sqrt{2}), \therefore$ 当两圆外切时, $|CM| = 3 = 1 + r, \therefore r = 2$. 当两圆内切时,

$|CM| = r - 1, \therefore r = 4. \because M$ 到直线 $y = \sqrt{7}x$ 的距离 $d = 1, \therefore$ 当 $r = 2$ 时, 弦长为 $2\sqrt{2^2 - 1^2} = 2\sqrt{3}$; 当 $r = 4$

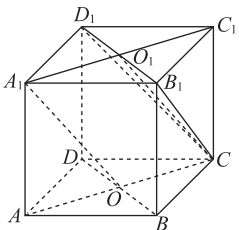
时, 弦长为 $2\sqrt{4^2 - 1^2} = 2\sqrt{15}$ 12 分

21. (1) 证明: 连 OA_1 和 CO_1 , 在四边形 OCO_1A_1 中, $OC \parallel O_1A_1$ 且 $OC = O_1A_1$,

\therefore 四边形 A_1O_1CO 为平行四边形, $\therefore A_1O \parallel CO_1$, 4 分

又 $O_1C \subset$ 平面 $CB_1D_1, A_1O \not\subset$ 平面 CB_1D_1 ,

$\therefore A_1O \parallel$ 平面 CB_1D_1 6 分



(2) 解: 由直四棱柱 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 的底面 $ABCD$ 是菱形, 可得 $B_1D_1 \perp$ 平面 O_1OC ,

$\because B_1D_1 \subset$ 平面 CB_1D_1, \therefore 平面 $CB_1D_1 \perp$ 平面 O_1OC , 8 分

设点 O 到平面 CB_1D_1 的距离为 h , 则 $\triangle O_1OC$ 中, $OC = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $O_1O = 1$,

$$\therefore O_1C = \sqrt{\frac{3}{4} + 1} = \frac{\sqrt{7}}{2}, \therefore \text{由等面积可得: } h = \frac{1 \times \frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{7}}{2}} = \frac{\sqrt{21}}{7}, \therefore \text{点 } O \text{ 到平面 } CB_1D_1 \text{ 的距离为 } \frac{\sqrt{21}}{7}. \dots\dots\dots$$

..... 12 分

22. 解: (1) $f(x) > 0$ 即 $2^x > 2^{-x}$, $\therefore x > -x$, $\therefore x > 0$ 2 分

(2) 设函数 $f(x), g(x)$ 在区间 $[1, +\infty)$ 上的值域分别为 A, B ,

由题可得, $A \cap B \neq \varnothing$, 3 分

$$\because f(x) = 2^x - \frac{1}{2^x} \text{ 在 } [1, +\infty) \text{ 上为增函数, } \therefore A = [\frac{3}{2}, +\infty), \dots\dots\dots 4 \text{ 分}$$

$$\because g(x) = -(\ln x - 2)^2 + b + 4, x \in [1, +\infty), \therefore g(x) \in (-\infty, b + 4], \therefore B = (-\infty, b + 4], \dots\dots\dots 6 \text{ 分}$$

$$\therefore b + 4 \geq \frac{3}{2} \text{ 即 } b \geq -\frac{5}{2}. \dots\dots\dots 7 \text{ 分}$$

(3) $\because g(x) = -(\ln x - 2)^2 + b + 4 < 0$ 对于 $x \in (0, +\infty)$ 恒成立,

$$\therefore b + 4 < 0, b < -4, \text{ 且 } g(x) \in (-\infty, b + 4]. \dots\dots\dots 8 \text{ 分}$$

$$\because f(x) = 2^x - \frac{1}{2^x} \text{ 为增函数, 且 } x < 0 \text{ 时, } f(x) < 0, \therefore f[g(x)] < 0. \dots\dots\dots 10 \text{ 分}$$

$$\therefore f[g(x)] + b < 0,$$

$$\therefore \text{不存在实数 } x, \text{ 使得 } f[g(x)] = -b \text{ 成立. } \dots\dots\dots 12 \text{ 分}$$