

2018 学年七宝中学高一年级开学考

2019.3.6

一、填空题

1. 已知函数 $f(x)$ 是幂函数, 且 $2f(4) = f(16)$, 则 $f(x)$ 的解析式是_____.

2. 若 $\cos\left(\frac{\pi}{6} - \alpha\right) = \frac{\sqrt{3}}{3}$, 则 $\cos\left(\frac{5\pi}{6} + \alpha\right) =$ _____.

3. 不等式 $\frac{1-x}{x+1} \geq 0$ 的解集为_____.

4. 若不等式 $x^2 - kx + k - 1 > 0$ 对 $x \in (1, 2)$ 恒成立, 则实数 k 的取值范围是_____.

5. 函数 $y = \frac{\sin x}{|\sin x|} + \frac{|\cos x|}{\cos x} + \frac{\tan x}{|\tan x|} + \frac{|\cot x|}{\cot x}$ 的值域是_____.

6. 若 $\sin \alpha + \cos \alpha = \frac{1}{5}, 0 \leq \alpha \leq \pi$, 那么 $\tan \alpha$ 的值是_____.

7. 函数 $y = f(x)$ 的反函数 $y = f^{-1}(x)$, 如果函数 $y = f(x)$ 的图形过点 $(2, -2)$, 那么函数 $y = f^{-1}(-2x) + 1$ 的图像一定过点_____.

8. 定义在正整数集上的分段函数 $f(x) = \begin{cases} 1, & x=1 \\ \frac{x}{5}, & x \text{ 是 } 5 \text{ 的倍数} \\ x-1, & x \text{ 是其它整数} \end{cases}$, 则满足 $f\{f[f(x)]\} = 1$

的所有 x 的值的和等于_____.

9. 若 $2 \sin \alpha = 1 + \cos \alpha$, 则 $\tan \alpha =$ _____.

10. 已知 $\tan \alpha \cdot \tan \beta = \frac{\sqrt{3}}{3}$, 求 $(2 - \cos 2\alpha)(2 - \cos 2\beta) =$ _____.

11. 若关于 x 的方程 $\frac{\log_a x}{\log_2 x} + \frac{\log_x(2a-x)}{\log_x 2} = \frac{1}{\log_{a^2-1} 2}$ 恰有一解, 求 a 的取值范围

_____.

12. $f(x) = \begin{cases} x, & x \text{ 是无理数;} \\ \frac{q+1}{p}, & x = \frac{q}{p} (p \in \mathbb{N}^*, q \in \mathbb{Z}, \text{且 } p, q \text{ 互素}) \end{cases}$ 求 $f(x)$ 在 $\left(\frac{7}{8}, \frac{8}{9}\right)$ 上的最大值

_____.

二、选择题

13. “ $\tan \theta = a$ ”是“ $\frac{1 - \cos 2\theta}{\sin 2\theta} = a$ ”的()

- A.充分非必要条件 B.必要充分条件
C.充要条件 D.既非充分也非必要条件

14.已知 $f(x) = \begin{cases} x^2 - 4x + 3, & x \leq 0 \\ -x^2 - 2x + 3, & x > 0 \end{cases}$, 不等式 $f(x+a) > f(2a-x)$ 在 $[a, a+1]$ 上恒成立,

则实数 a 的取值范围是()

- A. $(-2, 0)$ B. $(-\infty, 0)$ C. $(0, 2)$ D. $(-\infty, -2)$

15.有下列命题:(1)终边相同的角的同名三角比的值相等;(2)终边不同的角的同名三角比的值不同;(3)若 $\sin \alpha > 0$, 则 α 是第一或第二象限角;(4) $\triangle ABC$ 中, 若 $A > B$, 则 $\sin A > \sin B$. 其中正确命题的个数是 ()

- A.1 个 B.2 个 C.3 个 D.4 个

16.设 $f(x)$ 是定义域为 R 的以 3 为周期的奇函数, 且 $f(2) = 0$, 则方程 $f(x) = 0$ 在区间

$(-6, 6)$ 内解的个数的最小值为 ()

- A. 15 B.13 C.11 D.9

三、解答题

17.已知函数 $f(x) = a^{|x+b|}$ ($a > 0, a \neq 1, b \in R$)

(1) 若 $f(x)$ 的为偶函数, 求 b 的值;

(2) 若 $f(x)$ 在区间 $[2, +\infty)$ 上是增函数, 试 a, b 求应满足的条件.

18. 某电影院共有 1000 个座位, 票价不分等次, 根据该电影院的经营检验, 当每张票价不超过 10 元时, 票可全部售出, 当每张票价高于 10 元时, 每提高一元, 将有 30 张票不能售出, 为了获得更好的受益, 需给影院定一个合适的票价, 符合的基本条件是:

①为方便找零和算账, 票价定位 1 元的整数倍;

②影院放映一场电影的成本费为 5750 元, 票房收入必须高于成本支出.

(1) 设定价为 $x(x \in N^*)$ 元, 净收入为 y 元, 求 y 关于 x 的表达式;

(2) 每张票价定为多少元时, 放映一场的净收入最多? 此时放映一场的净收入为多少元?

19. (1) 已知 $\tan\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) = -\frac{1}{2}$, 求 $\frac{2\cos\alpha(\sin\alpha - \cos\alpha)}{1 + \tan\alpha}$ 的值;

(2) 已知 $\tan\theta = \frac{\sin\alpha - \cos\alpha}{\sin\alpha + \cos\alpha}$ (α, θ 都是锐角), 求 $\frac{\sin\alpha - \cos\alpha}{\sin\theta}$ 的值.

20. 已知关于 x 的方程 $mx^2 + (2m - 3)x + (m - 2) = 0$ ($m \neq 0$) 的两根为 $\tan\alpha, \tan\beta$ 。

(1) 求 m 的取值范围;

(2) 求 $\tan(\alpha + \beta)$ 的最小值;

(3) 求 $m\sin^2(\alpha + \beta) + (2m - 3)\sin(\alpha + \beta)\cos(\alpha + \beta) + (m - 2)\cos^2(\alpha + \beta)$ 的值.

21. 我们知道一次函数、二次的图像都是连续不断的曲线，事实上，多项式函数的图像都是如此。

(1) 设 $\alpha, \beta, x, y \in R$ 且 $\alpha, \beta > 0$ ，若还有 $\alpha x + \beta y = 0$ ，求证： $xy \leq 0$ 。

(2) 设一个多项式函数有奇次项 $x^{2k+1} (k \in N)$ ，求证：总能通过只调整 x^{2k+1} 的系数，使得调整后的多项式一定有零点；

现有未知数为 x 的多项式方程 $x^{10} + a_9 x^9 + \dots + a_1 x + 1 = 0$ (其中实数 a_1, a_2, \dots, a_9 特定)，甲、

乙两人进行一个游戏：有甲开始交替确定 a_1, a_2, \dots, a_9 中的一个数 (每次只能去确定剩余还未定的数)，当甲确定最后一个数后，若方程有实数解，则乙胜，反之甲胜。问：乙有必胜的策略吗？若有，请给出策略并证明；若无，请说明理由。