

一、填空题：

1、若集合 $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \left\{x \mid \frac{x-3}{x+1} < 0, x \in R\right\}$, 则 $A \cap B =$ _____ ;

2、函数 $f(x) = \frac{\sqrt{1-x}}{x}$ 的定义域是 _____ ;

3、方程 $2\log_2(x-1) = \log_2(2x+1)$ 的解为 $x =$ _____ ;

4、已知函数 $y = f(x)$ 是奇函数, 且当 $x < 0$ 时, $f(x) = 3^x + x$, 则当 $x > 0$ 时, $f(x) =$ _____ ;

5、函数 $f(x) = x^2 + 1 (x \leq -1)$ 的反函数 $f^{-1}(x) =$ _____ ;

6、已知扇形的周测为 4, 面积为 1, 则扇形的圆心角为 _____ ;

7、设 $m \in R$, 若函数 $f(x) = (m-1)x^2 + mx + 1$ 是偶函数, 则 $f(x)$ 的单调递减区间是 _____ ;

8、设函数 $f(x) = |x-1|$, 若 $0 < a < b$ 且 $f(a) = f(b)$, 则 ab 的取值范围是 _____ ;

9、对于非空数集 A, B , 定义集合运算: $A \odot B = \{ab \mid a \in A, b \in B\}$, 已知 $A = \{1, 2\}$, $B = \{-1, 1, 3\}$, 则集合 $A \odot B$ 中的元素之和为 _____ ;

10、已知点 $P(a, b) (a \neq b)$ 是直角坐标平面第一象限内一点, 点 P 关于直线 $y = x$ 的对称点为点 P' , 若点 P 及点 P' 都在幂函数 $y = f(x)$ 的图像上, 则 $f(x) =$ _____ ;

11、已知函数 $f(x) = \frac{9}{x+1} - 6$, $g(x) = a \cdot 2^x - 2a (a > 0)$, 若对任意 $x_1 \in [0, 2]$, 总存在 $x_2 \in [0, 2]$, 使 $g(x_2) = f(x_1)$ 成立, 则实数 a 的取值范围是 _____ ;

12、已知函数 $f(x) = \begin{cases} |x| & x \leq m \\ x^2 - mx + 2m & x > m \end{cases} (m > 0)$, 若存在实数 b , 使得函数

$g(x) = f(x) - b$ 有 3 个零点, 则实数 m 的取值范围是 _____ ;

二、选择题：

13、如果 $a > b, c > d$ ，则下列不等式成立的是（ ）

- A、 $a-c > b-d$ B、 $a+c > b+d$ C、 $\frac{a}{d} > \frac{b}{c}$ D、 $ac > bd$

14、唐代诗人杜牧的七绝唐诗中的两句诗为“今来海上升高望，不到蓬莱不成仙。”其中后一句“成仙”是“到蓬莱”的（ ）

- A、充分非必要条件 B、必要不充分条件 C、充要条件 D、既不充分又不必要条件

15、已知角 α 的终边在第一象限，那么角 $\frac{\alpha}{3}$ 的终边不可能再（ ）

- A、第一象限 B、第二象限 C、第三象限 D、第四象限

16、已知函数 $f(x) = x$ ， $g(x) = x^2 - x + 3$ ，若存在 $x_1, x_2, \dots, x_n \in \left[0, \frac{9}{2}\right]$ ，使得

$f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_{n-1}) + g(x_n) = g(x_1) + g(x_2) + \dots + g(x_{n-1}) + f(x_n)$ ，则正整数 n 的

最大值为（ ）

- A、5 B、6 C、7 D、8

三、解答题：

17、已知集合 $A = \{x \mid x^2 - 2x - 3 \leq 0, x \in \mathbb{R}\}$ ， $B = \{x \mid |x - m| \leq 2, x \in \mathbb{R}\}$ 。

(1) 若 $A \cup B = [-1, 5]$ ，求实数 m 的值；

(2) 若 $A \subseteq C_{\mathbb{R}} B$ ，求实数 m 的取值范围。

18、已知函数 $f(x) = \log_2(4^x + b \cdot 2^x + 4)$ ， $g(x) = x$ 。

(1) 当 $b = -5$ 时，求 $f(x)$ 的定义域；

(2) 若 $f(x) > g(x)$ 恒成立，求实数 b 的取值范围。

19、著名英国数学家和物理学家 Issac Newton 曾提出了物体在常温环境下温度变化的冷却模型：把物体放在冷空气中冷却，如果物体的初始温度为 $\theta_1^{\circ}\text{C}$ ，空气的温度为 $\theta_0^{\circ}\text{C}$ ， t 分钟后物体的温度 $\theta^{\circ}\text{C}$ 可由公式 $\theta = \theta_0 + (\theta_1 - \theta_0) \cdot e^{-kt}$ 得到，这里 e 是自然对数的底， k 是一个由物体与空气的接触状况而定的整肠生，先将一个初始温度为 62°C 的物体放在 15°C 的空气中冷却，1 分钟后物体的温度是 52°C 。

- (1) 求 k 的值（精确到 0.01）；
- (2) 该物体从最初的 62°C 冷却多少分钟后温度是 31°C （精确到 0.1）？

20、已知下表为函数 $f(x) = ax^3 + cx + d$ 部分自变量取值及其对应函数值，为了便于研究，相关函数值取非整数时，取值精确到 0.01。

x	-0.61	-0.59	-0.56	-0.35	0	0.26	0.42	1.57	2.03
$f(x)$	0.07	0.02	-0.03	-0.22	0	0.21	0.20	-10.04	-23.07

据表中数据，研究该函数的一些性质；

- (1) 判断函数 $f(x)$ 的奇偶性，并证明；
- (2) 判断函数 $f(x)$ 在区间 $[0.55, 0.6]$ 上是否存在零点，并说明理由；
- (3) 判断 a 的正负，并证明函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, -0.35]$ 上是单调递减函数。

21、若定义在 R 上的函数 $f(x)$ 满足:对任意的 $x_1, x_2 \in R$, 当 $x_1 < x_2$ 时, 都有 $f(x_1) \leq f(x_2)$, 则称 $f(x)$ 是“非减函数”.

(1) 若 $f(x) = ax^3 + 1$ 是“非减函数”, 求 a 的取值范围;

(2) 若 $f(x)$ 为偶函数, 且为“非减函数”, 证明 $f(x)$ 是常值函数;

(3) 已知 $f(x), g(x)$ 是两个“非减函数”, 定义 $\max\{a, b\} = \begin{cases} a & a \geq b \\ b & a < b \end{cases}$,

$\min\{a, b\} = \begin{cases} b & a \geq b \\ a & a < b \end{cases}$, 证明: 函数 $H(x) = \max\{f(x), g(x)\}$, $h(x) = \min\{f(x), g(x)\}$

都是“非减函数”.