

# 2018~2019 学年度上学期友好学校期末联考试题·高一数学(文科)

## 参考答案、提示及评分细则

1. B

2. D

3. D

4. C

5. A 圆的标准方程是  $(x-3)^2 + (y-4)^2 = 2$ , 圆心  $C(3, 4)$ , 所以  $|OC| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$ .

6. A 由  $f(-x) = -x \ln(2^x + 2^{-x}) = -f(x)$ , 故函数  $f(x)$  为奇函数, 图象关于原点对称. 又  $f(1) = \ln \frac{5}{2} > 0$ ,

故选 A.

7. C 设几何体是一个底面为梯形的直四棱柱, 体积为  $\frac{3}{2} \times 2 \times 2 = 6$ .

8. A  $\because$  函数  $f(x)$  是幂函数,  $\therefore m-2=1, m=3, \therefore g(x) = \log_a(x+3)$  过定点  $(-2, 0)$ .

9. D 圆心  $(1, -2)$  到直线  $x+y+3=0$  距离为  $\sqrt{2}$ , 圆的半径为  $r=2\sqrt{2}$ , 所以距离为  $\frac{\sqrt{2}}{2}$  的有 4 个.

10. B  $0 < 1.1^{-0.1} < 1 < \log_{1.5} 3 < \log_{1.5} 4 = 2 \log_{1.5} 2$ , 可得  $c < a < b$ .

11. A  $V_{P-ABC} = \frac{1}{3} \times 2 \times 2 \times PA = \frac{2}{3} PA = \frac{4\sqrt{3}}{3}$ , 得  $PA = 2\sqrt{3}$ ,  $(2R)^2 = 4 + 4 + (2\sqrt{3})^2$ , 有  $R = \sqrt{5}$ ,  $V_{\text{球}} = \frac{20}{3}\sqrt{5}\pi$ .

12. B  $3-a > 1, a > 1$ , 且  $(3-a)^2 \leq 3, \therefore 3-\sqrt{3} \leq a < 2$ .

13.  $(\frac{1}{3}, -\frac{1}{3})$  由  $(a-3)x + ay + 1 = 0$  得  $(x+y)a = 3x-1$ , 令  $x+y=0, 3x-1=0$  得  $x=\frac{1}{3}, y=-\frac{1}{3}$ , 所以

直线恒过定点  $(\frac{1}{3}, -\frac{1}{3})$ .

14. 10

15.  $4\sqrt{10}$  两圆方程相减可得公共弦直线方程  $l$  为  $x+3y+10=0$ , 圆  $x^2+y^2+10x+10y=0$  的圆心到  $l$  的距

离为  $\frac{|-5-15+10|}{\sqrt{10}} = \sqrt{10}$ ,  $\therefore$  公共弦长为  $2\sqrt{(5\sqrt{2})^2 - \sqrt{10}^2} = 4\sqrt{10}$ .

16.  $(-\infty, 1]$

17. 解:(1) $a=1$  时, $A=\{x|-1<x<4\}$ ,

$\because B=\{x|3<x<5\},\therefore A\cup B=\{x|-1<x<5\}$ ;

$\complement_U A=\{x|x\leqslant -1 \text{ 或 } x\geqslant 4\},\therefore (\complement_U A)\cap B=\{x|4\leqslant x<5\}$ . ..... 5 分

(2) $\because$ 非空集合  $A=\{x|a-2<x<3a+1\},\therefore 3a+1>a-2,\therefore a>-\frac{3}{2}$ ,

$\complement_U A=\{x|x\leqslant a-2 \text{ 或 } x\geqslant 3a+1\}$ ,

$\because (\complement_U A)\cap B=B,\therefore B\subseteq \complement_U A,\therefore a-2\geqslant 5, \text{或 } 3a+1\leqslant 3,\therefore a\geqslant 7 \text{ 或 } a\leqslant \frac{2}{3}$ ,

$\therefore a$  的取值范围是 $(-\frac{3}{2},\frac{2}{3}]\cup[7,+\infty)$ . ..... 10 分

18. 解:(1)令 $\begin{cases} 1-x>0 \\ 1+x>0 \end{cases}$ ,得 $-1<x<1$ ,则函数  $f(x)$ 的定义域为 $(-1,1)$ ,关于原点对称, ..... 3 分

由  $f(-x)=\log_a(1+x)-\log_a(1-x)=-f(x)$ ,故函数  $f(x)$ 为奇函数. .... 6 分

(2)①当  $0<a<1$  时, $f(x)<0$  可化为 $\log_a(1-x)<\log_a(1+x)$ ,利用对数函数的单调性得  $1-x>1+x$ ,得  $x<0$ , $\because -1<x<1,\therefore -1<x<0$ , ..... 9 分

②当  $a>1$  时, $f(x)<0$  可化为 $\log_a(1-x)<\log_a(1+x)$ ,利用对数函数的单调性得  $1-x<1+x$ ,得  $x>0$ ,

$\because -1<x<1,\therefore 0<x<1$ . ..... 12 分

19. 证明:(1)因为  $DF=2FC, BE=2EC$ ,所以 $\frac{CF}{FD}=\frac{CE}{BE}=\frac{1}{2}$ ,

所以  $BD\parallel EF$ . ..... 3 分

因为  $EF\subset$ 平面  $AEF, BD\not\subset$ 平面  $AEF$ ,

所以  $BD\parallel$ 平面  $AEF$ . ..... 5 分

(2)因为  $AE\perp$ 平面  $BCD, CD\subset$ 平面  $BCD$ ,

所以  $AE\perp CD$ . ..... 7 分

因为  $BD\perp CD, BD\parallel EF$ ,所以  $CD\perp EF$ , ..... 9 分

又  $AE \cap EF = E$ , 所以  $CD \perp$  平面  $AEF$ . ..... 10 分

又  $CD \subset$  平面  $ACD$ , 所以平面  $AEF \perp$  平面  $ACD$ . ..... 12 分

20. 解: (1) 由题意, 设圆  $C$  方程为  $(x-a)^2 + (y-b)^2 = 2$ , 且  $a < 0, b > 0$ ,

$\because$  圆  $C$  与直线  $3x+4y=0$  及  $y$  轴都相切,  $\therefore a = -\sqrt{2}, \frac{|3a+4b|}{5} = \sqrt{2}$ ,

$\therefore b = 2\sqrt{2}$ ,  $\therefore$  圆  $C$  方程为  $(x+\sqrt{2})^2 + (y-2\sqrt{2})^2 = 2$ ,

化为一般方程为  $x^2 + y^2 + 2\sqrt{2}x - 4\sqrt{2}y + 8 = 0$ ,

$\therefore D = 2\sqrt{2}, E = -4\sqrt{2}, F = 8$ . ..... 8 分

(2) 圆心  $C(-\sqrt{2}, 2\sqrt{2})$  到直线  $x-y+2\sqrt{2}=0$  的距离为  $d = \frac{|-\sqrt{2}-2\sqrt{2}+2\sqrt{2}|}{\sqrt{2}} = 1$ ,

$\therefore |AB| = 2\sqrt{r^2 - d^2} = 2\sqrt{2-1} = 2$ . ..... 12 分

21. (1) 证明: 连  $OA_1$  和  $CO_1$ , 在四边形  $OCO_1A_1$  中,  $OC \parallel O_1A_1$  且  $OC = O_1A_1$ ,

$\therefore$  四边形  $A_1O_1CO$  为平行四边形,  $\therefore A_1O \parallel CO_1$ , ..... 4 分

又  $O_1C \subset$  平面  $CB_1D_1, A_1O \not\subset$  平面  $CB_1D_1$ ,

$\therefore A_1O \parallel$  平面  $CB_1D_1$ . ..... 6 分

(2) 解: 由直四棱柱  $ABCD-A_1B_1C_1D_1$  的底面  $ABCD$  是菱形, 可得  $B_1D_1 \perp$  平面  $O_1OC$ ,

$\because B_1D_1 \subset$  平面  $CB_1D_1, \therefore$  平面  $CB_1D_1 \perp$  平面  $O_1OC$ , ..... 8 分

设点  $O$  到平面  $CB_1D_1$  的距离为  $h$ , 则  $\triangle O_1OC$  中,  $OC = \frac{\sqrt{3}}{2}, O_1O = 1$ ,

$\therefore O_1C = \sqrt{\frac{3}{4} + 1} = \frac{\sqrt{7}}{2}$ ,  $\therefore$  由等面积可得:  $h = \frac{1 \times \frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{7}}{2}} = \frac{\sqrt{21}}{7}$ ,  $\therefore$  点  $O$  到平面  $CB_1D_1$  的距离为  $\frac{\sqrt{21}}{7}$ . ..... 12 分

22. (1) 证明: 令  $\begin{cases} 1+2^x \geq 0 \\ 1-2^x \geq 0 \end{cases}$ , 解得  $x \leq 0$ , 故函数的定义域为  $(-\infty, 0]$

$$\begin{aligned} \text{令 } x_1 < x_2 \leq 0, f(x_2) - f(x_1) &= (\sqrt{1+2^{x_2}} - \sqrt{1-2^{x_2}}) - (\sqrt{1+2^{x_1}} - \sqrt{1-2^{x_1}}) \\ &= (\sqrt{1+2^{x_2}} - \sqrt{1+2^{x_1}}) + (\sqrt{1-2^{x_1}} - \sqrt{1-2^{x_2}}) \dots\dots\dots 2 \text{ 分} \end{aligned}$$

$$\text{由 } x_2 > x_1, \text{有 } 2^{x_2} > 2^{x_1}, \text{可得 } \sqrt{1+2^{x_2}} > \sqrt{1+2^{x_1}},$$

$$\text{由 } x_2 > x_1, \text{有 } 1-2^{x_1} > 1-2^{x_2}, \text{可得 } \sqrt{1-2^{x_1}} > \sqrt{1-2^{x_2}},$$

$$\text{故 } f(x_2) > f(x_1), \text{则函数 } f(x) \text{在定义域上单调递增,} \dots\dots\dots 4 \text{ 分}$$

$$(2) \text{由 } \sqrt{1+2^x} > 1, \sqrt{1-2^x} < 1, \text{故 } f(x) > 0,$$

$$[f(x)]^2 = 2 - 2\sqrt{(1+2^x)(1-2^x)} = 2 - 2\sqrt{1-4^x}, \dots\dots\dots 6 \text{ 分}$$

$$\text{当 } x \leq 0 \text{ 时, } 0 < 4^x \leq 1, \text{有 } 0 \leq 1-4^x < 1, \text{可得: } 0 \leq \sqrt{1-4^x} < 1, \text{故 } 0 < [f(x)]^2 \leq 2,$$

$$\text{由 } f(x) > 0, \text{可得 } 0 < f(x) \leq \sqrt{2}, \text{故函数 } f(x) \text{的值域为 } (0, \sqrt{2}], \dots\dots\dots 8 \text{ 分}$$

$$(3) \text{由 (2) 知 } 2\sqrt{1-4^x} = 2 - [f(x)]^2,$$

$$\text{则 } g(x) = m\{2 - [f(x)]^2\} + f(x) = -m[f(x)]^2 + f(x) + 2m,$$

$$\text{令 } f(x) = t (0 < t \leq \sqrt{2}), \text{则 } g(x) = -mt^2 + t + 2m,$$

$$\text{令 } h(t) = -mt^2 + t + 2m (0 < t \leq \sqrt{2}), \dots\dots\dots 9 \text{ 分}$$

$$\text{① 当 } m=0 \text{ 时, } h(t) = t \in (0, \sqrt{2}], \text{此时函数 } h(t) \text{没有零点,故函数 } g(x) \text{也没有零点;} \dots\dots\dots 10 \text{ 分}$$

$$\begin{aligned} \text{② 当 } m < 0 \text{ 时, 二次函数 } h(t) \text{的对称轴为 } t &= -\frac{1}{2 \times (-m)} = \frac{1}{2m} < 0, \text{则函数 } h(t) \text{在区间 } (0, \sqrt{2}] \text{单调递增, 而} \\ h(0) &= 2m < 0, h(\sqrt{2}) = \sqrt{2} > 0, \text{故函数 } h(t) \text{有一个零点, 又由函数 } f(x) \text{单调递增, 可得函数 } g(x) \text{也只有一} \\ \text{个零点;} \dots\dots\dots &11 \text{ 分} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{③ 当 } m > 0 \text{ 时, } -m < 0, \text{二次函数 } h(t) \text{开口向下, 又由 } h(0) &= 2m > 0, h(\sqrt{2}) = \sqrt{2} > 0, \text{此时函数 } h(t) \text{没有零} \\ \text{点, 故函数 } g(x) \text{也没有零点,} \end{aligned}$$

$$\text{由上知, 当 } m \geq 0 \text{ 时, 函数 } g(x) \text{没有零点; 当 } m < 0 \text{ 时, 函数 } g(x) \text{有且仅有一个零点.} \dots\dots\dots 12 \text{ 分}$$