

参考答案、提示及评分细则

1. D $a_2 = (-1)^3 + 1 = 0, a_3 = (-1)^4 + 1 = 2, \therefore a_2 + a_3 = 2.$

2. C 由正弦定理 $\frac{a}{c} = \frac{\sin A}{\sin C} = 3, \therefore \sin A = 3 \sin C = \frac{3}{5}.$

3. C

4. D 由 p 为真命题, q 为假命题, 可知(非 p)或(非 q)为真命题.

5. B $|\mathbf{a}| = \sqrt{(-1)^2 + 2^2 + (-2)^2} = 3$, 则与 \mathbf{a} 同向的单位向量的坐标为 $(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3})$

6. B 由数形结合得, 直线 $z = 4x - y$ 经过点 $A(5, 5)$ 时, z 有最大值为 15.

7. A $\therefore \sin(A-B) \cos B + \cos(A-B) \sin B = \sin[(A-B)+B] = \sin B \geq 1,$

又因为 $\sin B \leq 1$, 所以 $\sin B = 1$, 因为 $0 < B < \pi$, 所以 $B = \frac{\pi}{2}$, 在 $\triangle ABC$ 为直角三角形;

若 $\triangle ABC$ 为直角三角形, 则 B 不一定为直角, 也可能为锐角,

则 $\sin B$ 不一定取到最大值 1, 即不一定有 $\sin(A-B) \cos B + \cos(A-B) \sin B \geq 1$,

故“ $\sin(A-B) \cos B + \cos(A-B) \sin B \geq 1$ ”是“ $\triangle ABC$ 是直角三角形”的充分不必要条件, 故选 A.

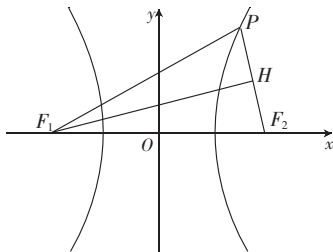
8. D 圆的标准方程为: $(x+2)^2 + y^2 = 1$, 当 $y=0$ 时 $x=-3$ 或 -1 , 可得 $-\frac{p}{2} = -3$ 或 -1 , 得 $p=2$ 或 6 .

9. C 由题知 $a_3 = \frac{120}{5} = 24, (a_3 + a_4 + a_5) \times \frac{1}{7} = a_1 + a_2$, 即 $(3a_3 + 3d) \times \frac{1}{7} = 2a_3 - 3d$, 解得 $d = 11, \therefore a_5 = a_3 + 2d = 46.$

10. A 如图取 PF_2 的中点 H , 则 $F_1H \perp PF_2$, 由 $PF_1 = F_1F_2 = 2c$, 则 $PF_2 =$

$$PF_1 - 2a = 2c - 2a \text{ 故有 } PH = c - a, \cos \angle F_1PF_2 = \frac{PH}{PF_1} = \frac{c-a}{2c} = \frac{1}{4}, \text{ 得 } c$$

$$= 2a, \text{ 有 } \frac{b}{a} = \frac{\sqrt{c^2 - a^2}}{a} = \frac{\sqrt{3}a}{a} = \sqrt{3}, \text{ 则双曲线的渐近线方程为 } y = \pm \sqrt{3}x.$$



11. D 若存在点 P 使得 $PF_1 \perp PF_2$, 则点 P 在以线段 F_1F_2 为直径的圆上, 若

存在一点 P 在椭圆外, 只需 $c > b$, 可得: $c^2 > a^2 - c^2$, 可得: $e > \frac{\sqrt{2}}{2}$, 由 $0 < e < 1$, 有 $\frac{\sqrt{2}}{2} < e < 1$.

12. C 由 $a_1 \cdot a_7 = 4$ 可得 $a_4 = 2$, 又 $a_3 + a_5 = \frac{a_4}{q} + a_4 \cdot q = \frac{2}{q} + 2q = 5, \therefore q = 2$ 或 $\frac{1}{2}$ (舍), $\therefore a_1 = \frac{1}{4}, a_n = 2^{n-3},$

$$b_n = \log_2 a_n = n - 3, \therefore S_n = \frac{(-2 + n - 3)}{2} \times n = \frac{n(n-5)}{2}, \therefore \frac{S_n}{n} = \frac{n-5}{2}, \therefore \frac{S_1}{1} + \frac{S_2}{2} + \dots + \frac{S_n}{n} = \frac{1}{2} \times$$

$$\frac{(-4 + n - 5)}{2} \times n = \frac{1}{4} (n^2 - 9n) = \frac{1}{4} \left(n - \frac{9}{2} \right)^2 - \frac{81}{16}, \therefore n = 4 \text{ 或 } 5 \text{ 时, 取最小值.}$$

13. $\exists x_0 \in \mathbf{R}, x_0^2 - 2x_0 - 1 \geq 0$.

14. $\frac{1}{2} \quad 2 = a + 2b \geq 2 \sqrt{2ab}, \therefore ab \leq \frac{1}{2}$.

15. $\left(0, \frac{\pi}{3}\right]$ 由 $\frac{a}{b+c} + \frac{c}{b+a} \geq 1$ 可得 $a^2 + c^2 - b^2 \geq ac$, 即 $2ac \cos B \geq ac, \cos B \geq \frac{1}{2}$, 又 $B \in (0, \pi)$,
 $\therefore B \in \left(0, \frac{\pi}{3}\right]$.

16. $\frac{1}{6}$ 联立方程 $\begin{cases} y^2 = 6x \\ y = kx - 1 \end{cases}$, 消去 y 得: $ky^2 - 6y - 6 = 0$, 则 $y_1 y_2 = -\frac{6}{k}, x_1 x_2 = \frac{1}{36} y_1^2 y_2^2 = \frac{1}{k^2}$,

由 $\vec{OA} \cdot \vec{OB} = x_1 x_2 + y_1 y_2 = \frac{1}{k^2} - \frac{6}{k} = 0$, 解得: $k = \frac{1}{6}$.

17. 解: 当命题 p 为真时, $\Delta = (2a - 4)^2 - 4 \leq 0$, 解得: $1 \leq a \leq 3$, 2 分

当命题 q 为真时, $a = 2 \sin(x_0 - \frac{\pi}{3})$, 则 $-2 \leq a \leq 2$, 4 分

由命题“ p 或 q ”为真, “ p 且 q ”为假, 则命题 p 和命题 q 一真一假, 5 分

① 当 p 真 q 假时, $\begin{cases} 1 \leq a \leq 3 \\ a > 2 \text{ 或 } a < -2 \end{cases}$, 得 $2 < a \leq 3$, 7 分

② 当 p 假 q 真时, $\begin{cases} a < 1 \text{ 或 } a > 3 \\ -2 \leq a \leq 2 \end{cases}$, 得 $-2 \leq a < 1$, 9 分

由上知实数 a 的取值范围为 $-2 \leq a < 1$ 或 $2 < a \leq 3$ 10 分

18. 解: (1) 由正弦定理知, $2 \sin B \cos C + \sin C = 2 \sin A = 2 \sin(B + C) = 2 \sin B \cos C + 2 \cos B \sin C$,

$\therefore \cos B = \frac{1}{2}, B = \frac{\pi}{3}$ 6 分

(2) 由余弦定理, $\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}, \frac{1}{2} = \frac{25 + c^2 - 49}{2 \times 5 \times c}, \therefore c = 8$ 12 分

19. 解: (1) 设过焦点 $F(\frac{p}{2}, 0)$ 的直线 l 的方程为: $my = x - \frac{p}{2}$, 点 A, B 的坐标分别为 $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$,
..... 1 分

联立方程 $\begin{cases} my = x - \frac{p}{2} \\ y^2 = 2px \end{cases}$, 消去 x 整理为: $y^2 - 2pmy - p^2 = 0$, 2 分

可得 $y_1 y_2 = -p^2, x_1 x_2 = \frac{y_1^2}{2p} \times \frac{y_2^2}{2p} = \frac{y_1^2 y_2^2}{4p^2} = \frac{p^2}{4}$, 4 分

$\vec{OA} \cdot \vec{OB} = x_1 x_2 + y_1 y_2 = \frac{p^2}{4} - p^2 = -\frac{3}{4} p^2 = -\frac{3}{16}$, 解得 $p = \frac{1}{2}$,

则抛物线的标准方程为 $y^2 = x$ 6 分

(2) 设点 Q 的坐标为 (x_0, y_0) , 有 $y_0^2 = x_0$, 7 分

由 $|PQ| \geq 2|t|$ 有 $\sqrt{(x_0 - 2t)^2 + y_0^2} \geq 2|t|$, 整理为: $x_0^2 - 4tx_0 + y_0^2 \geq 0$, 即 $x_0^2 - 4tx_0 + x_0 \geq 0$, 可化为

$$x_0(x_0 - 4t + 1) \geq 0, \text{ 由 } x_0 \geq 0, \text{ 只需 } x_0 - 4t + 1 \geq 0, \text{ 得 } 1 - 4t \geq 0, t \leq \frac{1}{4}$$

故实数 t 的取值范围为 $(-\infty, \frac{1}{4}]$ 12 分

20. 解: (1) 由 $S_1 = 4a_1 - 6$, 得 $a_1 = 2$ 1 分

当 $n \geq 2$ 时, $a_n = S_n - S_{n-1} = (4a_n - 6) - (4a_{n-1} - 6) = 4a_n - 4a_{n-1}$, 得 $\frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{4}{3}$ 4 分

故数列 $\{a_n\}$ 是以 2 为首项, $\frac{4}{3}$ 为公比的等比数列, 则数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n = 2 \times (\frac{4}{3})^{n-1}$ 6 分

(2) 由 $b_n = \log_{\frac{4}{3}}(\frac{2}{3}a_n) = \log_{\frac{4}{3}}(\frac{4}{3})^n = n$ 8 分

$$\frac{1}{b_1 b_2} + \frac{1}{b_2 b_3} + \dots + \frac{1}{b_{n-1} b_n} = \frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \dots + \frac{1}{(n-1)n} = (1 - \frac{1}{2}) + (\frac{1}{2} - \frac{1}{3}) + \dots + (\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}) = 1 - \frac{1}{n}$$

有 $1 - \frac{1}{n} = \frac{87}{88}$, 得 $n = 88$ 12 分

21. 解: 以 A 为坐标原点, AB 、 AD 、 AA_1 分别为 x 轴、 y 轴、 z 轴建立如图所示直角坐标系, 不妨设正方体

$ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的边长为 4, 则各点坐标如下: $A(0, 0, 0)$ 、 $B(4, 0, 0)$ 、 $C(4, 4, 0)$ 、 $D(0, 4, 0)$ 、 $C_1(4, 4, 4)$,

由 $\overrightarrow{AE} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AC_1} = \frac{3}{4}(4, 4, 4) = (3, 3, 3)$, 则点 E 的坐标为 $(3, 3, 3)$, 3 分

(1) 由 $\overrightarrow{BD} = (-4, 4, 0)$, $\overrightarrow{CE} = (-1, -1, 3)$, 有 $\overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{CE} = 0$, 则异面直线 BC 与 DE 垂直. 5 分

(2) 设平面 ADE 的法向量为 $m = (x_1, y_1, z_1)$,

$$\text{由 } \overrightarrow{AD} = (0, 4, 0), \overrightarrow{AE} = (3, 3, 3), \text{ 则 } \begin{cases} m \cdot \overrightarrow{AD} = 4y_1 = 0 \\ m \cdot \overrightarrow{AE} = 3x_1 + 3y_1 + 3z_1 = 0, \end{cases}$$

取 $x_1 = 1, y_1 = 0, z_1 = -1$, 故 $m = (1, 0, -1)$, 7 分

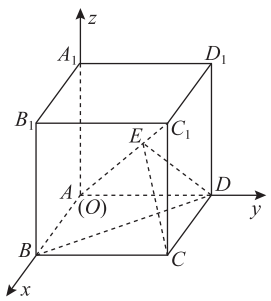
设平面 CDE 的法向量为 $n = (x_2, y_2, z_2)$.

$$\text{由 } \overrightarrow{DC} = (4, 0, 0), \overrightarrow{DE} = (3, -1, 3), \text{ 则 } \begin{cases} n \cdot \overrightarrow{DC} = 4x_2 = 0 \\ n \cdot \overrightarrow{DE} = 3x_2 - y_2 + 3z_2 = 0, \end{cases}$$

取 $x_2 = 0, y_2 = 3, z_2 = 1$, 故 $n = (0, 3, 1)$, 9 分

则 $m \cdot n = -1, |m| = \sqrt{2}, |n| = \sqrt{10}, \cos \langle m, n \rangle = \frac{m \cdot n}{|m||n|} = \frac{-1}{\sqrt{2} \times \sqrt{10}} = -\frac{\sqrt{5}}{10}$, 11 分

设二面角 $A-ED-C$ 的大小为 θ , 有 $|\cos \theta| = \frac{\sqrt{5}}{10}$, 则 $\sin \theta = \sqrt{1 - \cos^2 \theta} = \sqrt{1 - \frac{1}{20}} = \frac{\sqrt{95}}{10}$ 12 分



22. 解: (1) 由题意知点 A 、 B 的坐标分别为 $(-2, 0)$ 、 $(2, 0)$, 设点 M 的坐标为 (x_0, y_0) , 有 $\frac{x_0^2}{4} + \frac{y_0^2}{2} = 1$,

可得： $y_0^2 = \frac{1}{2}(4 - x_0^2)$ ， 1 分

则直线 AM 的方程为： $y = \frac{y_0}{x_0 + 2}(x + 2)$ ，令 $x = -4$ ，得 $y = -\frac{2y_0}{x_0 + 2}$ ，

则点 P 的坐标为 $(-4, -\frac{2y_0}{x_0 + 2})$ ， 3 分

由 $k_1 = \frac{\frac{2y_0}{x_0 + 2}}{6} = \frac{y_0}{3(x_0 + 2)}$ ， $k_2 = \frac{y_0}{x_0 - 2}$ ，有 $k_1 k_2 = \frac{y_0^2}{3(x_0^2 - 4)} = \frac{\frac{1}{2}(4 - x_0^2)}{3(x_0^2 - 4)} = -\frac{1}{6}$ ，

则： $\frac{2}{k_1 k_2} = -12$ 。 6 分

(2) 由(1)知： $\overrightarrow{PB} = (6, \frac{2y_0}{x_0 + 2})$ ， $\overrightarrow{PM} = (x_0 + 4, y_0 + \frac{2y_0}{x_0 + 2}) = (x_0 + 4, \frac{(x_0 + 4)y_0}{x_0 + 2})$ 7 分

则 $\overrightarrow{PB} \cdot \overrightarrow{PM} = 6(x_0 + 4) + \frac{2(x_0 + 4)y_0^2}{(x_0 + 2)^2} = 6(x_0 + 4) + \frac{2(x_0 + 4) \times \frac{1}{2}(4 - x_0^2)}{(x_0 + 2)^2}$
 $= 6(x_0 + 4) + \frac{(x_0 + 4)(2 - x_0)}{x_0 + 2}$ ， 9 分

由题意知： $-2 < x_0 < 2$ ，令 $t = x_0 + 2 (0 < t < 4)$ ，

则 $\overrightarrow{PB} \cdot \overrightarrow{PM} = 6(t + 2) + \frac{(t + 2)(4 - t)}{t} = 6t + 12 + \frac{-t^2 + 2t + 8}{t} = 5t + \frac{8}{t} + 14, \geq 2\sqrt{5t \times \frac{8}{t}} + 14$
 $= 4\sqrt{10} + 14$ (当且仅当 $5t = \frac{8}{t}$ ，即 $t = \frac{2\sqrt{10}}{5}$ 时取等号)，此时 $x_0 = \frac{2\sqrt{10}}{5} - 2$ 。 12 分