

数学 (理) 试题

一、选择题 (本大题共 12 小题, 每小题 5 分, 共 60 分)

1. 已知集合 $A = \{x | x^2 - 4x + 3 < 0\}$, $B = \{x | 2 < x < 4\}$, 则 $A \cap B = (\quad)$

- A. (1,3) B. (2,4) C. (1,4) D. (2,3)

2. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} 2^x, & x \leq 0 \\ f(x-3), & x > 0 \end{cases}$, 则 $f(2) = (\quad)$

- A. 32 B. $\frac{1}{2}$ C. 16 D. $\frac{1}{32}$

3. 函数 $f(x) = \ln(2-x) + \sqrt{x+1}$ 的定义域为 (

- A. (-1,2) B. [-1,2) C. (-1,2] D. [-1,2]

4. 下列各对函数中, 图象完全相同的是 (

- A. $y = x$ 与 $y = (\sqrt[3]{x})^3$ B. $y = (\sqrt{x})^2$ 与 $y = |x|$

- C. $y = \frac{x}{x}$ 与 $y = x^0$ D. $y = \frac{x+1}{x^2-1}$ 与 $y = \frac{1}{x-1}$

5. 过点 (1, 0) 且与直线 $x-2y=0$ 垂直的直线方程是 (

- A. $x-2y-1=0$ B. $x-2y+1=0$ C. $2x+y-2=0$ D. $x+2y-1=0$

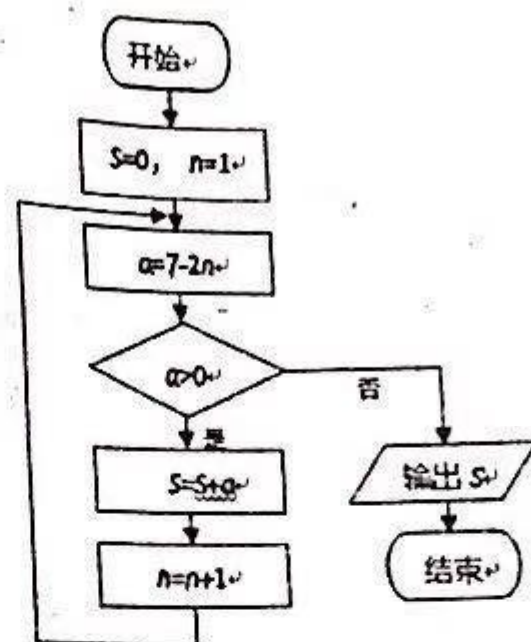
6. 设 $a \in R$, 则 “ $a=1$ ” 是 “直线 $l_1: ax+2y-4=0$ 与 $l_2: x+(a+1)y+2=0$ 平行” 的

- (
- A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
- C. 充分必要条件 D. 既不充分也不必要条件

7. 若点 $P(1,1)$ 为圆 $C: (x-3)^2 + y^2 = 9$ 的弦 MN 的中点, 则弦 MN 所在直线的方程为

- A. $2x-y-1=0$ B. $2x-y+1=0$ C. $2x+y-1=0$ D. $2x+y+1=0$

8. 执行如图所示的程序框图, 则输出的 S 值为 (



- A. 4 B. 5 C. 8 D. 9

9. 若命题 $p: \exists x_0 \in R, x_0^2 - x_0 + 1 \leq 0$, 命题 $q: \forall x < 0, |x| > x$. 则下列命题中是真命题的是 (

- A. $p \wedge q$ B. $p \wedge (\neg q)$ C. $(\neg p) \wedge q$ D. $(\neg p) \wedge (\neg q)$

10. 设命题 $p: \forall x \in R^+, x-1 \geq \ln x$, 则 $\neg p$ 为 (

- A. $\exists x_0 \in R^+, x_0 - 1 \geq \ln x_0$ B. $\exists x_0 \in R^+, x_0 - 1 < \ln x_0$
- C. $\exists x_0 \in R^+, x_0 - 1 < \ln x_0$ D. $\forall x_0 \in R^+, x - 1 < \ln x$

11. 已知 $a, b \in R$, 则 “ $ab=0$ ” 是 “ $a^2 + b^2 = 0$ ” 的 (条件)

- A. 充分不必要 B. 必要不充分 C. 充要 D. 既不充分也不必要

12. 下列四个命题中, 真命题的个数是

①命题: “已知 $a, b \in R$ 且 “ $a^2 + b^2 \geq 1$ ” 是 “ $|a| + |b| \geq 1$ ” 的充分不必要条件”;

②命题: “ p 且 q 为真” 是 “ p 或 q 为真” 的必要不充分条件;

③命题: 已知幂函数 $f(x) = x^a$ 的图象经过点 $(2, \frac{\sqrt{2}}{2})$, 则 $f(4)$ 的值等于 $\frac{1}{2}$;

④命题: 若 $x + \ln x > 1$, 则 $x > 1$.

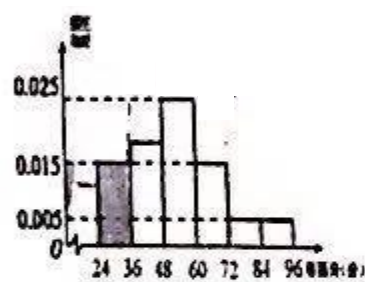
A. 1 B. $\frac{1}{2}$ C. 3 D. 4

二、填空题 (本大题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分)

13. 如图, 边长为 2 的正方形中有一封闭曲线围成的阴影区域, 在正方形中随机撒 10 粒豆子, 10 粒中有 6 粒落在阴影区域, 则阴影区域的面积约为_____.



14. 通常, 满分为 100 分的试卷, 60 分为及格线, 若某次满分为 100 分的测试卷, 100 人参加测试, 将这 100 人的卷面分数按照 $[24, 36), [36, 48), \dots, [84, 96]$ 分组后绘制的频率分布直方图如图所示. 由于及格人数较少, 某位老师准备将每位学生的卷面分采用“开方乘以 10 取整”的方式进行换算以提高及格率 (实数 a 的取整等于不超过 a 的最大整数), 如: 某位学生卷面 49 分, 则换算成 70 分作为他的最终考试成绩, 则按照这种方式, 这次测试的及格率将变为_____.



15. 已知向量 \vec{a}, \vec{b} 的夹角为 60° , 且 $|\vec{a}| = 1, |\vec{b}| = 2$, 则 $\vec{a} \cdot (\vec{a} + 2\vec{b}) =$ _____.

16. 若方程 $\sin x - \sqrt{3} \cos x = c$ 有实数解, 则 c 的取值范围是_____.

三、解答题 (本大题共 6 小题, 共 70 分)

17. (本题满分 10 分) 设锐角三角形 ABC 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , $a = 2b \sin A$.

(1) 求 B 的大小.

(2) 若 $a = 3\sqrt{3}, c = 5$, 求 b .

18. (本题满分 12 分) 已知等差数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 = -7, S_3 = -15$

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 求数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n .

19. (本题满分 12 分) 命题 P : 方程 $x^2 - 3x + m = 0$ 有实数解, 命题 Q : 方程

$$\frac{x^2}{9-m} + \frac{y^2}{m-2} = 1 \text{ 表示焦点在 } x \text{ 轴上的椭圆.}$$

(1) 若命题 P 为真, 求 m 的取值范围;

(2) 若命题 $P \wedge Q$ 为真, 求 m 的取值范围.

20. (本题满分 12 分) 已知直线 l 过点 $M(-3, 3)$, 圆 $C: x^2 + y^2 + 4y + m = 0 (m \in \mathbb{R})$.

(I) 求圆 C 的圆心坐标及直线 l 截圆 C 弦长最长时直线 l 的方程;

(II) 若过点 M 直线与圆 C 恒有公共点, 求实数 m 的取值范围.

21. (本题满分 12 分) 已知函数 $f(x) = \frac{x}{x+2}$.

(1) 判断并证明 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上的单调性;

(2) 若 $x \in [-1, 2]$, 求 $f(x)$ 的值域.

22. (本题满分 12 分) 已知函数 $g(x) = x^2 - (m-1)x + m - 7$.

(1) 若函数 $g(x)$ 在 $[2, 4]$ 上具有单调性, 求实数 m 的取值范围;

(2) 若在区间 $[-1, 1]$ 上, 函数 $y = g(x)$ 的图象恒在 $y = 2x - 9$ 图象上方, 求实数 m 的取值范围.