

参考答案、提示及评分细则

1. D  $a_2 = (-1)^3 + 1 = 0, a_3 = (-1)^4 + 1 = 2, \therefore a_2 + a_3 = 2.$

2. C 由正弦定理  $\frac{a}{c} = \frac{\sin A}{\sin C} = 3, \therefore \sin A = 3 \sin C = \frac{3}{5}.$

3. C

4. A 由题意有  $\frac{p}{2} = 3$ , 得  $p = 6$ , 所求抛物线的标准方程为:  $x^2 = 12y.$

5. D

6. B 由数形结合得, 直线  $z = 4x - y$  经过点  $A(5, 5)$  时,  $z$  有最大值为 15.

7. A  $\therefore \sin(A-B) \cos B + \cos(A-B) \sin B = \sin[(A-B) + B] = \sin B \geq 1,$

又因为  $\sin B \leq 1$ , 所以  $\sin B = 1$ , 因为  $0 < B < \pi$ , 所以  $B = \frac{\pi}{2}$ , 在  $\triangle ABC$  为直角三角形;

若  $\triangle ABC$  为直角三角形, 则  $B$  不一定为直角, 也可能为锐角,

则  $\sin B$  不一定取到最大值 1, 即不一定有  $\sin(A-B) \cos B + \cos(A-B) \sin B \geq 1$ ,

故“ $\sin(A-B) \cos B + \cos(A-B) \sin B \geq 1$ ”是“ $\triangle ABC$  是直角三角形”的充分不必要条件, 故选 A.

8. B 由  $\triangle ABF_2$  的周长为  $4\sqrt{3}$ , 显然椭圆的焦点在  $x$  轴上, 则  $4a = 4\sqrt{3}$ , 得  $a = \sqrt{3}$ , 则椭圆的离心率为  $e =$

$$\frac{\sqrt{3-2}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

9. A  $\therefore a_5 = a_1 + 4d = 5, \frac{S_8}{a_1} = \frac{8a_1 + \frac{8 \times 7}{2}d}{a_1 + 3d} = 9$ , 解得  $a_1 = 1, d = 1, \therefore S_n = \frac{n(n+1)}{2}, \frac{1}{2S_n} = \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1},$

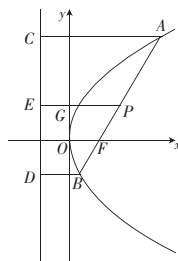
$\therefore$  数列  $\left\{ \frac{1}{2S_n} \right\}$  前 100 项和为  $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{100} - \frac{1}{101} = 1 - \frac{1}{101} = \frac{100}{101}.$

10. A 由正弦定理知  $\frac{\cos A}{\sin A} = \frac{\cos B}{\sin B} = \frac{\sin C}{\sin C} = 1, \therefore \cos A = \sin A, \cos B = \sin B, \cos A \sin B = \cos B \sin A$ , 又  $0 <$

$A, B, C < \pi, \therefore A = B = \frac{\pi}{4}, c = \frac{\pi}{2}, \therefore \triangle ABC$  为等腰直角三角形.

11. B 过点  $A, B, P$  分别作抛物线的准线  $x = -\frac{p}{2}$  的垂线, 垂足分别为  $C, D, E$ , 由抛物线的定义

有  $AB = AF + BF = AC + BD = 2EP = 2(GP + \frac{p}{2}) = 4 + p = 8$ , 解得  $p = 4$ .



12. A 令  $f(x) = \frac{e^x}{x}$ , 则  $f'(x) = \frac{(x-1)e^x}{x^2}$ , 故函数  $f(x)$  的增区间为  $(1, +\infty)$ , 则有  $f(x_2) > f(x_1)$ , 可得  $\frac{e^{x_2}}{x_2} >$

$\frac{e^{x_1}}{x_1}$ , 即  $x_1 e^{x_2} > x_2 e^{x_1}$ , 故 A 选项正确. 令  $g(x) = \frac{x}{\ln x}$ , 则  $g'(x) = \frac{\ln x - 1}{(\ln x)^2}$ , 故函数  $g(x)$  在区间  $(1, e)$  上单调递

减, 在区间  $(e, +\infty)$  上单调递增, 故 C、D 选项都错误.

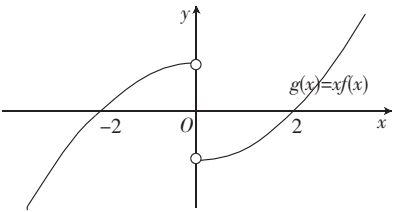
13.  $\exists x_0 \in \mathbf{R}, x_0^2 - 2x_0 - 1 \geq 0$ .

14.  $\frac{1}{2} \quad 2 = a + 2b \geq 2\sqrt{2ab}, \therefore ab \leq \frac{1}{2}$ .

15.  $\sqrt{3}$  由双曲线的对称性, 不妨设  $2c = \sqrt{3}$ , 则  $MF_1 = 2, MF_2 = 1$ , 有  $2a = MF_1 - MF_2 = 1$ , 双曲线的离心率为  $e$

$= \frac{c}{a} = \frac{2c}{2a} = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3}$ .

16.  $\{x | x < -2 \text{ 或 } 0 < x < 2\}$  令  $g(x) = xf(x)$ , 当  $x > 0$  时, 由  $[g(x)]' = f(x) + xf'(x) > 0$ , 故函数  $g(x)$  在  $(0, +\infty)$  单调递增. 又  $g(-x) = -xf(-x) = -xf(x) = -g(x)$ , 故函数  $g(x)$  为奇函数, 图象关于原点对称. 由  $f(2) = 0$ , 有  $g(2) = 2f(2) = 0$ , 则函数  $g(x)$  的图象大概趋势如下图所示 (不考虑  $x = 0$  时的情况):



由不等式  $\frac{f(x)}{x} < 0$  可转化为  $xf(x) < 0$ , 所求不等式的解集为  $\{x | x < -2 \text{ 或 } 0 < x < 2\}$ .

17. 解: 当命题  $p$  为真时,  $\Delta = (2a - 4)^2 - 4 \leq 0$ , 解得:  $1 \leq a \leq 3$ , ..... 2 分

当命题  $q$  为真时,  $a = 2\sin(x_0 - \frac{\pi}{3})$ , 则  $-2 \leq a \leq 2$ , ..... 4 分

由命题“ $p$  或  $q$ ”为真, “ $p$  且  $q$ ”为假, 则命题  $p$  和命题  $q$  一真一假, ..... 5 分

① 当  $p$  真  $q$  假时,  $\begin{cases} 1 \leq a \leq 3 \\ a > 2 \text{ 或 } a < -2 \end{cases}$ , 得  $2 < a \leq 3$ , ..... 7 分

② 当  $p$  假  $q$  真时,  $\begin{cases} a < 1 \text{ 或 } a > 3 \\ -2 \leq a \leq 2 \end{cases}$ , 得  $-2 \leq a < 1$ , ..... 9 分

由上知实数  $a$  的取值范围为  $-2 \leq a < 1$  或  $2 < a \leq 3$ . ..... 10 分

18. 解: (1) 由正弦定理知,  $2\sin B \cos C + \sin C = 2\sin A = 2\sin(B + C) = 2\sin B \cos C + 2\cos B \sin C$ ,

$\therefore \cos B = \frac{1}{2}, B = \frac{\pi}{3}$ . ..... 6 分

(2) 由余弦定理,  $\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}, \frac{1}{2} = \frac{25 + c^2 - 49}{2 \times 5 \times c}, \therefore c = 8$ . ..... 12 分

19. (1) 解:  $\because C(8, 0), F\left(\frac{p}{2}, 0\right), \overrightarrow{FC} = 3\overrightarrow{OF}, \therefore p = 4$ ,

抛物线的方程为  $y^2 = 8x$ . ..... 4 分

(2) 证明: 由  $\begin{cases} y^2 = 8x, \\ y = x - 8, \end{cases}$  得  $y^2 = 8(y + 8)$ , 即  $y^2 - 8y - 64 = 0$ ,

设  $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), \therefore y_1 y_2 = -64$ , 又  $x_1 x_2 = \frac{y_1^2}{8} \cdot \frac{y_2^2}{8} = \frac{(-64)^2}{64} = 64$ ,

$\therefore \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = x_1 x_2 + y_1 y_2 = 64 - 64 = 0, \therefore \overrightarrow{OA} \perp \overrightarrow{OB}$ , 即  $OA \perp OB$ . ..... 12 分

20. 解: (1) 由  $S_7 = 28$  得  $7a_1 + \frac{7 \times 6}{2}d = 28$ , 化简得  $a_1 + 3d = 4$ ,

由  $a_1, a_3, a_9$  成等比数列得  $a_3^2 = a_1 a_9$ , 即  $(a_1 + 2d)^2 = a_1(a_1 + 8d)$ ,

化简得  $a_1 = d, \therefore a_1 = d = 1, a_n = n$ . ..... 6 分

(2) 由 (1) 知,  $b_n = 2^n + n, \therefore T_n = \frac{2(1 - 2^n)}{1 - 2} + \frac{(1 + n) \times n}{2} = 2^{n+1} + \frac{n(n+1)}{2} - 2$ . ..... 12 分

21. 解: (1) 由题意有  $\begin{cases} \frac{1}{a^2} + \frac{9}{4b^2} = 1 \\ \frac{3}{b^2} = 1 \end{cases}$ , 解得  $\begin{cases} a = 2 \\ b = \sqrt{3} \end{cases}$  ..... 3 分

故椭圆方程为  $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ . ..... 4 分

(2) 证明: 由 (1) 知  $c = 1$ , 点  $F_1, F_2$  的坐标分别为  $(-1, 0), (1, 0)$ ,

由椭圆对称性知点  $P$  的坐标为  $(-1, \frac{3}{2})$ , 则直线  $PF_2$  的斜率为  $\frac{\frac{3}{2} - 0}{-1 - 1} = -\frac{3}{4}$ , ..... 6 分

则直线  $QF_2$  的方程为:  $y = \frac{4}{3}(x - 1)$ , 由直线  $l$  的方程为:  $x = 4$ , 令  $x = 4$  可得  $y = 4$ , 则点  $Q$  的坐标为  $(4, 4)$ ,

故直线  $PQ$  的方程为:  $y - 4 = \frac{1}{2}(x - 4)$ , 整理为  $y = \frac{1}{2}x + 2$ . ..... 8 分

联立方程  $\begin{cases} y = \frac{1}{2}x + 2 \\ \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1 \end{cases}$ , 消去  $y$  整理为:  $x^2 + 2x + 1 = 0$ , 解得:  $x = -1$ , 故直线  $PQ$  与椭圆仅有一个交点, 与椭圆

圆相切. .... 12 分

22. 解:(1)当  $a=e$  时,  $f(x)=x+\frac{e}{e^x}, f'(x)=1-\frac{e}{e^x}=\frac{e^x-e}{e^x}$

令  $f'(x)>0$ , 得  $x>1$ , 故函数  $f(x)$  在区间  $[0,1]$  上单调递减, 在区间  $[1,2]$  上单调递增 .... 2 分

则  $f(x)_{\min}=f(1)=2, f(0)=e, f(2)=2+\frac{1}{e}$ , .... 3 分

由  $f(2)<2+\frac{1}{2}=\frac{5}{2}<e=f(0)$ , 故函数  $f(x)$  的最小值为 2, 最大值为  $e$  .... 4 分

(2)证明:由  $f(x)=1-\frac{a}{e^x}=\frac{e^x-a}{e^x}$

①当  $a\leq 0$  时,  $f'(x)>0$ , 此时函数  $f(x)$  单调递增, 由  $f(0)=a$ , 则当  $0<x<1$  时  $f(x)>a$ , 取  $0<x_0<1$  即可, 必有  $f(x_0)>a$  .... 6 分

②当  $a>0$  时, 令  $f'(x)>0$ , 得  $x>\ln a$ , 此时函数  $f(x)$  的增区间为  $(\ln a, +\infty)$ , 减区间为  $(-\infty, \ln a)$

I、当  $\ln a\geq 1$  时,  $a\geq e$ , 此时函数  $f(x)$  在区间  $(-1, 1)$  单调递减, 由  $f(0)=a$ , 则取  $-1<x_0<0$ , 必有  $f(x_0)>a$  .... 8 分

II、当  $\ln a\leq -1$  时,  $0<a\leq \frac{1}{e}$ , 此时函数  $f(x)$  在区间  $(-1, 1)$  单调递增, 由  $f(0)=a$ , 则取  $0<x_0<1$ , 必有  $f(x_0)>a$  .... 10 分

III、当  $-1<\ln a<1$  时,  $\frac{1}{e}<a<e$ , 此时函数  $f(x)$  在区间  $(-1, \ln a)$  单调递减, 在区间  $(\ln a, 1)$  单调递增, 由  $f(0)=a$ ,

若  $\ln a\leq 0<1$  时, 取  $0<x_0<1$ , 必有  $f(x_0)>a$ ;

若  $-1<0<\ln a$  时, 取  $-1<x_0<0$ , 必有  $f(x_0)>a$ ;

由上知:存在实数  $-1<x_0<1$ , 使得  $f(x_0)>a$ 。 .... 12 分