

## 高二理科数学参考答案

1.【答案】 B

【解析】 根据除法运算,化简复数  $z$  得,  $z = \frac{1-i}{1+2i} = \frac{-1-3i}{5}$ , 故  $z$  的共轭复数  $\bar{z} = \frac{-1-3i}{5}$ ,  
故选 B.

2.【答案】 B

【解析】 因为相对于点  $(3, 6.5)$  的残差为  $-0.1$ , 所以  $6.5 - \hat{y} = -0.1$ , 所以  $6.5 + 0.1 = 3b + 0.6$ ,  
解得  $b = 2$ , 故选 B

3.【答案】 A

【解析】 命题“周长为定值的长方形中,正方形的面积取得最大”线面关系,类比猜想得:“在表面积为定值的长方体中,正方体的体积取得最大”面体关系,故选 A.

4.【答案】 C

【解析】 从等高条形图中可以看出,在  $x_1$  中  $y_1$  的比重明显大于  $x_2$  中  $y_1$  的比重,所以两个分类变量的关系较强,故选 C.

5.【答案】 D

【解析】 独立性检验是对两个分类变量有关系的可信程度的判断,而不是因果关系,故 A, B 错误. 由已知得,认为性别与是否喜爱喝酒有关判断出错概率的可能性至多为 10%,故 C 错误, D 正确.

6.【答案】 C

【解析】 2 位男生在同一组的不同的选法数为  $C_2^2 C_6^2 A_2^2 = 30$ .

7.【答案】 B

【解析】  $f'(1)$ 、 $f'(2)$  是  $x$  分别为 1、2 时对应图像上点的切线斜率,  $f(2) - f(1) = \frac{f(2) - f(1)}{2 - 1}$ ,  
 $\therefore f(2) - f(1)$  为图像上  $x$  为 2 和 1 对应两点连线的斜率, 由图可知,  $f'(1) < f(2) - f(1) < f'(2)$ ,  
故选 B.

8.【答案】 C

【解析】  $P\left(\frac{3}{2} \leq X \leq \frac{7}{2}\right) = P(X=2) + P(X=3) = C_5^2 \left(\frac{1}{3}\right)^2 \left(\frac{2}{3}\right)^3 + C_5^3 \left(\frac{1}{3}\right)^3 \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{40}{81}$ ,  
所以选 C.

9.【答案】 D

【解析】 令  $m=0$  得,  $\sum_{k=0}^m C_{n-k}^{n-m} C_n^k = C_n^n C_n^0 = 1$ , 在选择项中, 令  $m=0$  排除 A, C; 在选择项中,  
令  $m=1$ , 排除 B, 故选 D

10.【答案】 B

【解析】 有 4 次命中且恰有 3 次连续命中的概率为  $A_4^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^7$ .

11.【答案】 D

【解析】 进入立定跳远决赛的学生是 1, 3, 4, 6, 7, 8, 9, 10 号的 8 个学生, 由同时进入两项决赛的有 6 人可知, 1, 3, 4, 6, 7, 8, 9, 10 号有 6 个学生进入 30 秒跳绳决赛, 在这 8 个学生的 30 秒跳绳决赛成绩中, 3, 6, 7 号学生的成绩依次排名为 1, 2, 3 名, 1 号和 10 号成绩相同, 若 1 号和 10 号不进入 30 秒跳绳决赛, 则 4 号肯定也不进入, 这样同时进入立定跳远决赛和 30 秒跳绳决赛

的只有 5 人,矛盾,所以 1,3,6,7,10 号学生必进入 30 秒跳绳决赛.

12.【答案】 D

【解析】 题意,根据正态分布密度曲线的对称性,可得,

$$p(0 \leq X \leq 1) = \frac{1}{2} [p(\mu - 2\sigma \leq X \leq \mu + 2\sigma) - p(\mu - \sigma \leq X \leq \mu + \sigma)] = 0.1359.$$

故所求的概率为  $p = 1 - \frac{0.1359}{2} = 0.93205$  故选 D.

13.【答案】 1

【解析】  $S = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = \sin x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 1 - 0 = 1.$

14.【答案】 240

【解析】  $T_{r+1} = (-1)^r C_6^r \left(\frac{1}{x^2}\right)^{6-r} \cdot (2x)^r = [(-1)^r C_6^r \cdot 2^r] x^{3r-12}$ , 令  $3r-12=0$  得,  $r=4$ , 所以

$\left(\frac{1}{x^2} - 2x\right)^6$  的展开式中的常数项为  $(-1)^4 C_6^4 \cdot 2^4 = 240$ .

15.【答案】  $\frac{n^2 - n + 6}{2}$

【解析】 依排列规律得,数表中第  $n (n \geq 3)$  行左起第 3 个数为  $\frac{n^2 - n + 6}{2}$ .

16.【答案】  $\frac{\sqrt{e}}{2}$

【解析】 由  $f(-x) + f(x) = x^2$ , 令  $f_1(x) = f(x) - \frac{1}{2}x^2$ ,

则  $f_1(x)$  为奇函数, 当  $x \leq 0$  时,  $f_1'(x) = f'(x) - x < 0$ ,

所以  $f_1(x)$  在  $(-\infty, 0]$  上单调递减,

所以  $f_1(x)$  在  $\mathbf{R}$  上单调递减.

因为存在  $x_0 \in \left\{x \mid f(x) + \frac{1}{2} \geq f(1-x) + x\right\}$ ,

所以  $f_1(x_0) \geq f_1(1-x_0)$ ,

所以  $x_0 \leq 1 - x_0$ , 即  $x_0 \leq \frac{1}{2}$ .

因为  $x_0$  为函数  $g(x)$  一个不动点, 所以  $g(x) = x$  在  $x \leq \frac{1}{2}$  时有解(\*),

令  $h(x) = g(x) - x = e^x - \sqrt{e}x - a, x \leq \frac{1}{2}$ ,

因为当  $x \leq \frac{1}{2}$  时,  $h'(x) = e^x - \sqrt{e} \leq e^{\frac{1}{2}} - \sqrt{e} = 0$ ,

所以函数  $h(x)$  在  $x \in \left(-\infty, \frac{1}{2}\right]$  时单调递减, 且  $x \rightarrow -\infty$  时,  $h(x) \rightarrow +\infty$ ,

所以(\*)只需  $h\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{e} - \frac{1}{2}\sqrt{e} - a \leq 0$ , 得  $a \geq \frac{\sqrt{e}}{2}$ .

17.【解析】 (1) 因为复数  $z$  为实数, 所以  $a^2 - 3a - 4 = 0$ , 所以  $a = -1$  或  $4$ ; (3 分)

(2) 因为复数  $z$  为纯虚数, 所以  $\begin{cases} a^2 - a - 2 = 0 \\ a^2 - 3a - 4 \neq 0 \end{cases}$ , 所以  $a = 2$ ; (6 分)

$$(3) \text{ 因为 } z \text{ 对应的点在第四象限, 所以 } \begin{cases} a^2 - a - 2 > 0 \\ a^2 - 3a - 4 < 0 \end{cases}$$

解不等式组得,  $2 < a < 4$ ,

即  $a$  的取值范围是  $(2, 4)$ . (10 分)

### 18. 【解析】

(1) 随机抽样的 100 名居民每人每天的平均健身时间为

$$\frac{1.2 \times 40 + 0.8 \times 10 + 1.5 \times 30 + 0.7 \times 20}{100} = 1.15 \text{ 小时}, (3 \text{ 分})$$

由此估计该小区居民每人每天的平均健身时间为 1.15 小时,

因为 1.15 小时  $< 70$  分钟, 所以该社区不可称为“健身社区”; (6 分)

(2) 由联立表可得,

$$k^2 = \frac{n(ad - bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)} = \frac{100(40 \times 20 - 30 \times 10)^2}{70 \times 30 \times 50 \times 50} \approx 4.762 > 3.840, (9 \text{ 分})$$

所以能在犯错误概率不超过 5% 的情况下认为“健康族”与“性别”有关. (12 分)

### 19. 【解析】 (1) 由已知, 预测高三的 6 次考试成绩如下:

	第 1 次考试	第 2 次考试	第 3 次考试	第 4 次考试	第 5 次考试	第 6 次考试
甲	78	86	89	96	98	100
乙	81	85	92	94	96	100

(2 分)

$$\text{甲高三的 6 次考试平均成绩为 } \frac{78 + 86 + 89 + 96 + 98 + 100}{6} = 91 \frac{1}{6},$$

$$\text{乙高三的 6 次考试平均成绩为 } \frac{81 + 85 + 92 + 94 + 96 + 100}{6} = 91 \frac{1}{3} (4 \text{ 分})$$

所以预测: 在将要进行的高三 6 次测试中, 甲、乙两个学生的平均成绩分别为 91, 91; (6 分)

(2) 因为  $X$  为高三的任意一次考试后甲、乙两个学生的同一次成绩之差的绝对值,

所以  $X = 0, 1, 2, 3$ , (8 分)

$$\text{所以 } p(X=0) = \frac{1}{6}, p(X=1) = \frac{1}{6}, p(X=2) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}, p(X=3) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3},$$

所以  $X$  的分布列为

$X$	0	1	2	3
$p$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

(10 分)

$$\text{所以 } E(X) = 0 \times \frac{1}{6} + 1 \times \frac{1}{6} + 2 \times \frac{1}{3} + 3 \times \frac{1}{3} = \frac{11}{6}. (12 \text{ 分})$$

### 20. 【解析】 (1) 因为 $f(x) = ax - \frac{2}{x} - 3\ln x - a = a(x-1) - \frac{2}{x} - 3\ln x$ ,

所以  $f(1) = -2$ , 所以函数  $f(x)$  的图像经过一个定点  $A(1, -2)$ , (2 分)

$$\text{因为 } f'(x) = a + \frac{2}{x^2} - \frac{3}{x}, \text{ 所以切线的斜率 } k = f'(1) = a - 1,$$

所以在  $A$  点处的切线方程为  $y - (-2) = (a-1)(x-1)$ ,

即  $y = (a-1)x - (a+1)$ ; (4 分)

(2) 因为  $f'\left(\frac{2}{3}\right) = a, f'\left(\frac{2}{3}\right) = 1$ , 所以  $a = 1$ , (5 分)

$$\text{故 } f(x) = x - \frac{2}{x} - 3\ln x - 1,$$

$$\text{则 } f'(x) = \frac{(x-1)(x-2)}{x^2},$$

由  $f'(x) = 0$  得  $x = 1$  或  $x = 2$ , (6 分)

当  $x$  变化时,  $f'(x)$ ,  $f(x)$  的变化情况如下表:

$x$	1	(1, 2)	2	(2, e)	e
$f'(x)$	0	-	0	+	
$f(x)$	-2	单调减	$-3\ln 2$	单调增	$e - \left(4 + \frac{2}{e}\right)$

从而在  $[1, e]$  上,  $f(x)$  有最小值, 且最小值为  $f(2) = -3\ln 2$ , (8 分)

$$\text{因为 } f(1) = -2, f(e) = e - \left(4 + \frac{2}{e}\right), \text{ 所以 } f(1) - f(e) = \left(\frac{2}{e} - e\right) + 2,$$

因为  $\frac{2}{x} - x$  在  $(0, +\infty)$  上单调减,  $e < 2.72$ ,

$$\text{所以 } \left(\frac{2}{e} - e\right) + 2 > \left(\frac{2}{2.72} - 2.72\right) + 2 = \frac{2}{2.72} - 0.72 = \frac{2 - 0.72 \times 2.72}{2.72} > 0,$$

所以  $f(1) > f(e)$ , 所以最大值为  $f(1) = -2$ , (11 分)

所以函数  $f(x)$  在  $[1, e]$  上的值域为  $[-3\ln 2, -2]$ . (12 分)

21. 【解析】 (1) 若定义  $f: (x_1, x_2, x_3, x_4) \rightarrow (y_1, y_2, y_3, y_4)$ , 其中  $y_i = x_i + 1$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ), 则  $f$  是从方程  $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 5$  的非负整数解集到方程  $y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 9$  的正整数解集的映射, (2 分)

利用隔板法得, 方程  $y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 9$  正整数解得个数是  $C_8^3 = 56$ , (4 分)

从而方程  $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 5$  的非负整数解得个数也是 56; (6 分)

(2) 设 4 名旅客中分别有  $z_1, z_2, z_3, z_4$  个人在第 1 号, 第 2 号, 第 3 号, 第 4 号安检口通过,

则  $z_1 + z_2 + z_3 + z_4 = 4$ , 由 (1) 的思路得, 此不定方程非负整数的个数为  $C_7^3$ , (9 分)

所以不同的进站方法数为  $A_4^4 \cdot C_7^3 = 840$ . (12 分)

22. 【解析】 (1)  $f'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{2e}e^x = \frac{2e - xe^x}{2ex}$ , 令  $g(x) = 2e - xe^x$ ,

显然,  $g(x) = 2e - xe^x$  在  $\left(\frac{1}{2}, 2\right)$  上单调递减, (1 分)

$$g\left(\frac{1}{2}\right) = 2e - \frac{\sqrt{e}}{2} > 0, g(2) = 2e - 2e^2 < 0,$$

根据零点存在定理得, 函数  $g(x)$  在  $\left(\frac{1}{2}, 2\right)$  存在唯一零点, (2 分)

当  $x \in \left(\frac{1}{2}, 2\right)$  时,  $2ex > 0$ , 所以  $f'(x) = \frac{g(x)}{2ex}$  在  $\left(\frac{1}{2}, 2\right)$  存在唯一零点; (3 分)

(2) 因为  $f(x) = \ln x - \frac{e^{x-1}}{2}$ ,  $f(x) - h(x) = ax - \frac{e^{x-1}}{2}$  ( $a \in \mathbf{R}$ ),

所以  $h(x) = \ln x - ax$  ( $a \in \mathbf{R}$ ), (4 分)

不妨设  $x_1 > x_2 > 0$ , 因为  $h(x_1) = h(x_2) = 0$ , 所以  $\ln x_1 - ax_1 = 0, \ln x_2 - ax_2 = 0$ ,  
 所以  $\ln x_1 + \ln x_2 = a(x_1 + x_2), \ln x_1 - \ln x_2 = a(x_1 - x_2)$ ,  
 因为  $x_1 > 0, x_2 > 0$ , 而要求满足  $x_1 x_2 > b$  的  $b$  的最大值, 所以  $b > 0$ .  
 所以原不等式  $x_1 x_2 > b \Leftrightarrow \ln x_1 + \ln x_2 > \ln b \Leftrightarrow a(x_1 + x_2) > \ln b$

$$\Leftrightarrow \frac{\ln x_1 - \ln x_2}{x_1 - x_2} > \frac{\ln b}{x_1 + x_2} \Leftrightarrow \ln \frac{x_1}{x_2} > \frac{(x_1 - x_2) \ln b}{x_1 + x_2} \Leftrightarrow \ln \frac{x_1}{x_2} > \frac{\left(\frac{x_1}{x_2} - 1\right) \ln b}{\frac{x_1}{x_2} + 1} (*) (5 \text{ 分})$$

令  $\frac{x_1}{x_2} = t$ , 则  $t > 1$ , 所以  $(*) \Leftrightarrow (t+1) \ln t - (t-1) \ln b > 0$ ,

令  $k(t) = (t+1) \ln t - (t-1) \ln b$ , 则  $k'(t) = \ln t + \frac{t+1}{t} - \ln b, k''(t) = \frac{t-1}{t^2}$ ,

因为  $t > 1$ , 所以  $k''(t) = \frac{t-1}{t^2} > 0$ ,

所以  $k'(t) = \ln t + \frac{t+1}{t} - \ln b$  在  $(1, +\infty)$  上单调递增, 所以  $k'(t) > k'(1) = 2 - \ln b$  (7 分)

①若  $2 - \ln b \geq 0$ , 即  $0 < b \leq e^2$  时, 得  $k'(t) > 0$ ,

所以  $k(t) = (t+1) \ln t - (t-1) \ln b$  在  $(1, +\infty)$  上单调递增,

所以  $k(t) > k(1) = 0$ , 即原不等式成立. (8 分)

②若  $2 - \ln b < 0$ , 即  $b > e^2$  时,  $e^{\ln b} > e^{\ln b - 2} > e^0 = 1$ ,

$$k'(e^{\ln b - 2}) = \ln b - 2 + \frac{e^{\ln b - 2} + 1}{e^{\ln b - 2}} - \ln b = \frac{1 - e^{\ln b - 2}}{e^{\ln b - 2}} < 0,$$

$$k'(e^{\ln b}) = \ln b + \frac{e^{\ln b} + 1}{e^{\ln b}} - \ln b = \frac{b+1}{b} > 0,$$

由零点存在定理得,  $k'(t) = \ln t + \frac{t+1}{t} - \ln b$  在  $(e^{\ln b - 2}, e^{\ln b})$  上存在零点  $t_0$ ,

因为  $k'(t) = \ln t + \frac{t+1}{t} - \ln b$  在  $(1, +\infty)$  上单调递增,

所以  $\forall t \in (1, t_0), k'(t) < 0$  成立, 所以  $k(t)$  在  $(1, t_0)$  单调递减,

所以  $\forall t \in (1, t_0), k(t) < k(1) = 0$  成立,

所以当  $t > 1$  时,  $(t+1) \ln t - (t-1) \ln b > 0$  不恒成立.

综上,  $b \leq e^2$ . (12 分)