

马鞍山二中 2018-2019 学年度第二学期期末素质测试

高二（理科）数学试卷

第 I 卷（共 60 分）

一、单项选择题：本大题共 12 个小题，每小题 5 分，共 60 分。

1. 已知集合 $A = \{x | x+1 > 0\}$, $B = \{-2, -1, 0, 1\}$, 则 $(C_R A) \cap B$ 等于 ()

- A. $\{-2, -1\}$ B. $\{-2\}$ C. $\{-1, 0, 1\}$ D. $\{0, 1\}$

2. 已知复数 $z = \frac{2i}{1-i}$, \bar{z} 为 z 的共轭复数, 则 $\bar{z} \cdot z$ 的值为 ()

- A. -2 B. 0 C. $\sqrt{2}$ D. 2

3. 已知双曲线方程为 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$, 它的一条渐近线与圆 $(x-2)^2 + y^2 = 2$ 相切, 则双曲线的离心率为 ()

- A. $\sqrt{2}$ B. 2 C. $\sqrt{3}$ D. $2\sqrt{2}$

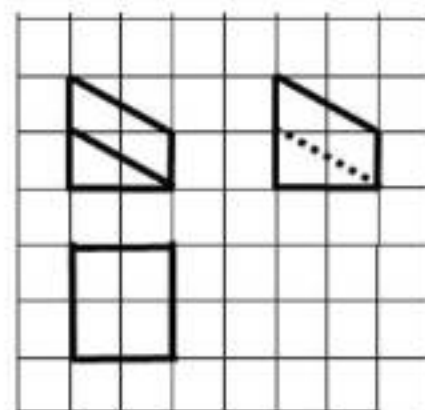
4. 已知 $-2, a_1, a_2, -8$ 成等差数列, $-2, b_1, b_2, b_3, -8$ 成等比数列, 则 $\frac{a_2 - a_1}{b_2}$ 等于 ()

- A. $\frac{1}{4}$ B. $\frac{1}{2}$ C. $-\frac{1}{2}$ D. $\frac{1}{2}$ 或 $-\frac{1}{2}$

5. 直线 $l: kx + y + 4 = 0 (k \in R)$ 是圆 $C: x^2 + y^2 + 4x - 4y + 6 = 0$ 的一条对称轴, 过点 $A(0, k)$ 作斜率为 1 的直线 m , 则直线 m 被圆 C 所截得的弦长为 ()

- A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ B. $\sqrt{2}$ C. $\sqrt{6}$ D. $2\sqrt{6}$

6. 如图, 网格纸的小正方形的边长是 1, 粗线表示一正方体被某平面截得的几何体的三视图, 则该几何体的体积为 ()



- A. 2 B. 4 C. 6 D. 8

7. 过抛物线 $y^2 = 4x$ 焦点 F 的直线交抛物线于 A, B 两点, 交其准线于点 C , 且 A, C 位于 x 轴同侧, 若 $|AC| = 2|AF|$, 则 $|BF|$ 等于 ()

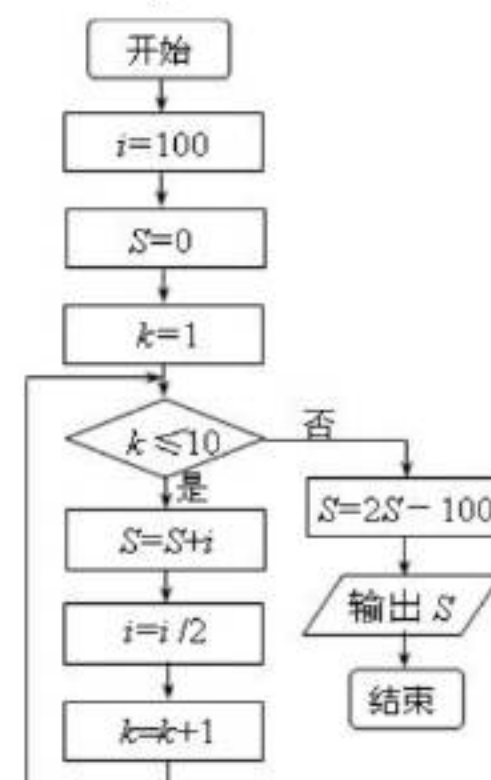
- A. 2 B. 3 C. 4 D. 5

8. 现有 5 人参加抽奖活动, 每人依次从装有 5 张奖票 (其中 3 张为中奖票) 的箱子中不放回地随机抽取一张, 直到 3 张中奖票都被抽出时活动结束, 则活动恰好在第 4 人抽完后结束的概率为 ()

- A. $\frac{1}{10}$ B. $\frac{1}{5}$ C. $\frac{3}{10}$ D. $\frac{2}{5}$

9. 一个球从 100 米高处自由落下, 每次着地后又跳回到原高度的一半再落下, 则右边程序框图输出的 S 表示的是 ()

- A. 小球第 10 次着地时向下的运动共经过的路程
B. 小球第 10 次着地时一共经过的路程
C. 小球第 11 次着地时向下的运动共经过的路程
D. 小球第 11 次着地时一共经过的路程

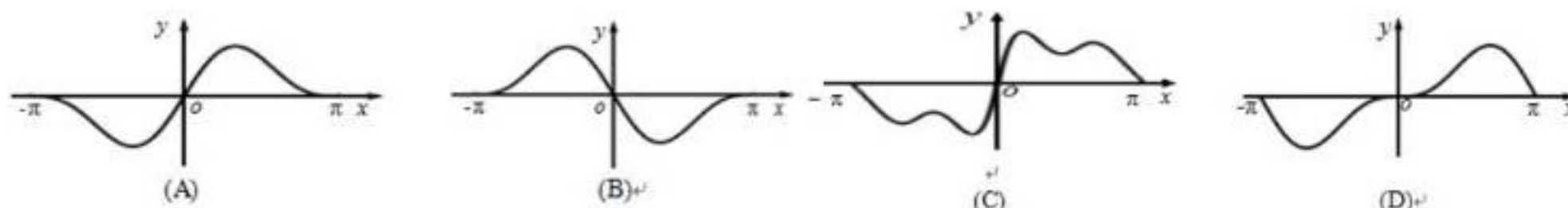


10. 已知 D, E 是 $\triangle ABC$ 边 BC 的三等分点, 点 P 在线段 DE 上, 若

$\overrightarrow{AP} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}$, 则 xy 的取值范围是 ()

- A. $[\frac{1}{9}, \frac{4}{9}]$ B. $[\frac{1}{9}, \frac{1}{4}]$ C. $[\frac{2}{9}, \frac{1}{2}]$ D. $[\frac{2}{9}, \frac{1}{4}]$

11. 函数 $f(x) = (1 + \cos x) \sin x$ 在 $[-\pi, \pi]$ 上的图象大致是 ()



12. 已知函数 $f(x) = \sin 2\omega x - 2\sqrt{3} \cos^2 \omega x + 1 (\omega > 0)$ 在区间 $(\pi, 2\pi)$ 内没有极值点, 则 ω 的取值范围为 ()

- A. $[\frac{5}{12}, \frac{11}{24}]$ B. $(0, \frac{5}{12}] \cup [\frac{11}{24}, \frac{1}{2})$ C. $(0, \frac{1}{2})$ D. $(0, \frac{5}{24}] \cup [\frac{5}{12}, \frac{11}{24}]$

第II卷（共90分）

二、填空题（每题5分，满分20分，将答案填在答题纸上）

13. 若将函数 $f(x) = x^6$ 表示为 $f(x) = a_0 + a_1(1+x) + a_2(1+x)^2 + \cdots + a_6(1+x)^6$ ，其中 a_1, a_2, \dots, a_6 为实数，则 a_3 等于_____.

14. $\triangle ABC$ 中，角 A, B, C 的对边分别是 a, b, c ，已知 $a = b, c^2 = 2b^2(1 - \sin C)$ ，则 $C =$ _____.

15. 已知函数 $f(x) = x^2(2^x - 2^{-x})$ ，则不等式 $f(2x+1) + f(1) \geq 0$ 的解集是_____.

16. 已知等腰直角 $\triangle ABC$ 的斜边 $BC = 2$ ，沿斜边的高线 AD 将 $\triangle ABC$ 折起，使二面角 $B - AD - C$ 为 $\frac{\pi}{3}$ ，则四面体 $ABCD$ 的外接球的表面积为_____.

三、解答题：解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤（22题满分10分，其余各题满分12分）.

17. 设 S_n 是数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和， $a_n > 0$ ，且 $4S_n = a_n(a_n + 2)$.

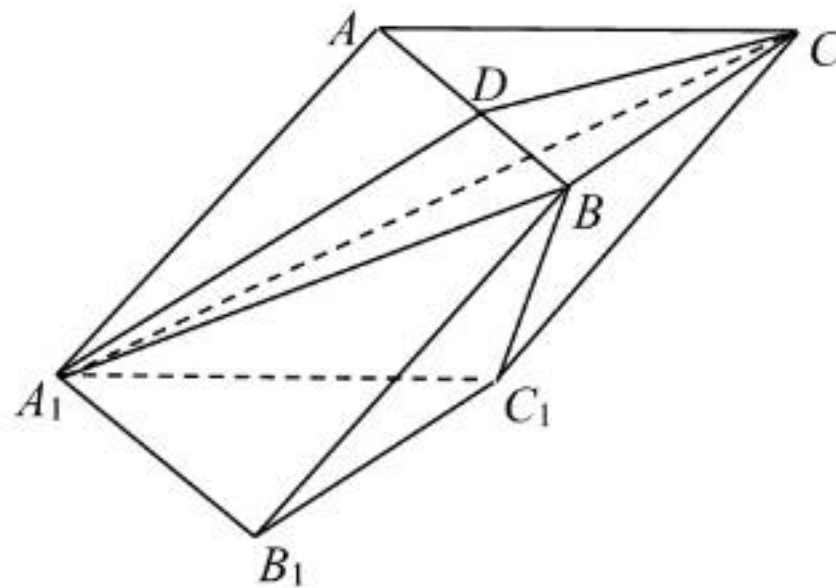
（I）求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

（II）设 $b_n = \frac{1}{(a_n - 1)(a_n + 1)}$ ， $T_n = b_1 + b_2 + \cdots + b_n$ ，求证： $T_n < \frac{1}{2}$.

18. 如图，在底边为等边三角形的斜三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 中， $AA_1 = \sqrt{3}AB$ ，四边形 B_1C_1CB 为矩形，过 A_1C 做与直线 BC_1 平行的平面 A_1CD 交 AB 于点 D .

（I）证明： $CD \perp AB$ ；

（II）若 AA_1 与底面 $A_1B_1C_1$ 所成角为 60° ，求二面角 $B - A_1C - C_1$ 的余弦值.



19. 中石化集团获得了某地深海油田块的开采权，集团在该地区随机初步勘探了部分几口井，取得了地质资料，进入全面勘探时期后，集团按网络点来布置井位进行全面勘探，由于勘探一口井的费用很高，如果新设计的井位与原有井位重合或接近，便利用旧井的地质资料，不必打这口新井，以节约勘探费用，勘探初期数据资料见下表：

井号 I	1	2	3	4	5	6
坐标 $(x, y) (km)$	(2,30)	(4,40)	(5,60)	(6,50)	(8,70)	(1, y)
钻探深度 (km)	2	4	5	6	8	10
出油量 (L)	40	70	110	90	160	205

(I) 1~6 号旧井位置线性分布，借助前 5 组数据求得回归直线方程为 $y = 6.5x + a$ ，求 a ，并估计 y 的预报值；

(II) 现准备勘探新井 7(1,25)，若通过 1,3,5,7 号井计算出的 b, a 的值 (b, a 精确到 0.01) 与 (I) 中 b, a 的值差不超过 10%，则使用位置最接近的已有旧井 6(1, y)，否则在新位置打开，请判断可否使用旧井？

(参考公式和计算结果： $\hat{b} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i - n \bar{x} \cdot \bar{y}}{\sum_{i=1}^n x_i^2 - n \bar{x}^2}$, $\hat{a} = \bar{y} - \hat{b} \bar{x}$, $\sum_{i=1}^4 x_{2i-1}^2 = 94$, $\sum_{i=1}^4 x_{2i-1} y_{2i-1} = 945$)

(III) 设出油量与勘探深度的比值 k 不低于 20 的勘探井称为优质井，那么在原有 6 口井中任意勘探 4 口井，求勘探优质井数 X 的分布列与数学期望。

20. 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$, 短轴长为 2.

(I) 求椭圆 C 的标准方程;

(II) 若圆 $O: x^2 + y^2 = 1$ 的切线 l 与曲线 E 相交于 A 、 B 两点, 线段 AB 的中点为 M , 求 $|OM|$ 的最大值.

21. 已知函数 $f(x) = x + \frac{a}{e^x}$, $g(x) = \ln(x^2 + 1)$.

(I) 若在 $x = 0$ 处, $y = f(x)$ 和 $y = g(x)$ 图象的切线平行, 求 a 的值;

(II) 设函数 $h(x) = \begin{cases} f(x) - a, & x \leq a \\ g(x) - a, & x > a \end{cases}$, 讨论函数 $h(x)$ 零点的个数.

22. 在平面直角坐标系 xOy 中，直线 l 过点 $P(2,6)$ ，且倾斜角为 $\frac{3}{4}\pi$ ，在极坐标系（与平面直角坐标系 xOy 取相同的长度，以原点 O 为极点， x 轴的非负半轴为极轴）中，曲线 C 的极坐标方程为

$$\rho = 20 \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right).$$

(I) 求直线 l 的参数方程与曲线 C 的直角坐标方程；

(II) 设曲线 C 与直线 l 交于点 A, B ，求 $|PA| + |PB|$ 。

理数参考答案

一、选择题

ADABC BCCBD AD

二、填空题

13. -20 14. $\frac{\pi}{4}$ 15. $[-1, +\infty)$ 16. $\frac{7\pi}{3}$

三、解答题

17. (I) 解: $\because 4S_n = a_n(a_n + 2)$, ①

当 $n=1$ 时得 $4a_1 = a_1^2 + 2a_1$, 即 $a_1 = 2$, 当 $n \geq 2$ 时有 $4S_{n-1} = a_{n-1}(a_{n-1} + 2)$ ②

由①-②得 $4a_n = a_n^2 - a_{n-1}^2 + 2a_n - 2a_{n-1}$, 即 $2(a_n + a_{n-1}) = (a_n + a_{n-1})(a_n - a_{n-1})$,

又 $\because a_n > 0$, $\therefore a_n - a_{n-1} = 2$, $\therefore a_n = 2 + 2(n-1) = 2n$.

(II) 证明: $\because b_n = \frac{1}{(a_n-1)(a_n+1)} = \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{1}{2}(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1})$,

$\therefore T_n = b_1 + b_2 + \dots + b_n = \frac{1}{2}(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}) = \frac{1}{2}(1 - \frac{1}{2n+1}) < \frac{1}{2}$.

(18) 解: (I) 连接 AC_1 交 AC 于点 E , 连接 DE .

因为 $BC_1 \parallel$ 平面 A_1CD , $BC_1 \subset$ 平面 ABC_1 , 平面 $ABC_1 \cap$ 平面 $A_1CD = DE$,
所以 $BC_1 \parallel DE$. 又因为四边形 ACC_1A_1 为平行四边形,

所以 E 为 AC_1 的中点, 所以 ED 为 $\triangle AC_1B$ 的中位线, 所以 D 为 AB 的中点.

又因为 $\triangle ABC$ 为等边三角形, 所以 $CD \perp AB$.

(II) 过 A 作 $AO \perp$ 平面 $A_1B_1C_1$ 垂足为 O , 连接 A_1O ,

设 $AB=2$.

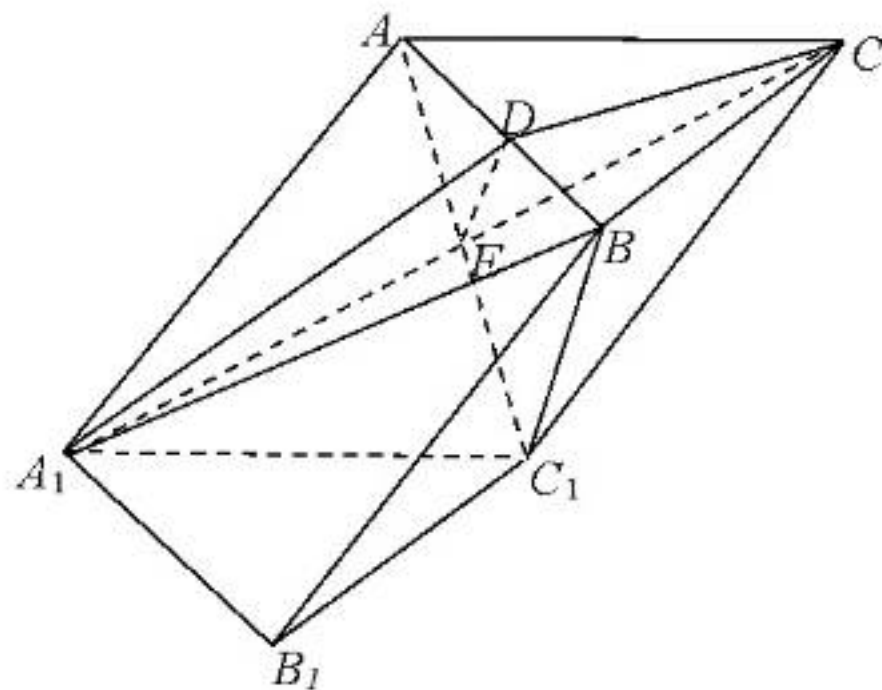
因为 AA_1 与底面 $A_1B_1C_1$ 所成角为 60° , 所以

$\angle AA_1O = 60^\circ$.

在 $RT\triangle AA_1O$ 中, 因为 $AA_1 = 2\sqrt{3}$,

所以 $A_1O = \sqrt{3}$, $AO = 3$.

因为 $AO \perp$ 平面 $A_1B_1C_1$, $B_1C_1 \subset$ 平面 $A_1B_1C_1$,



所以 $AO \perp B_1C_1$.

又因为四边形 B_1C_1CB 为矩形, 所以 $BB_1 \perp B_1C_1$,

因为 $BB_1 \parallel AA_1$, 所以 $B_1C_1 \perp AA_1$.

因为 $AA_1 \cap AO = A$, $AA_1 \subset$ 平面 AA_1O , $AO \subset$ 平面 AA_1O , 所以 $B_1C_1 \perp$ 平面 AA_1O .

因为 $A_1O \subset$ 平面 AA_1O , 所以 $B_1C_1 \perp A_1O$. 又因为 $A_1O = \sqrt{3}$, 所以 O 为 B_1C_1 的中点.

以 O 为原点, 以 $\overrightarrow{OA_1}, \overrightarrow{OB_1}, \overrightarrow{OA}$ 的方向为 x 轴, y 轴, z 轴的正方向建立空间直角坐标

系, 如图. 则 $A_1(\sqrt{3}, 0, 0)$, $C_1(0, -1, 0)$,

$A(0, 0, 3)$, $B_1(0, 1, 0)$.

因为 $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A_1B_1} = (-\sqrt{3}, 1, 0)$,

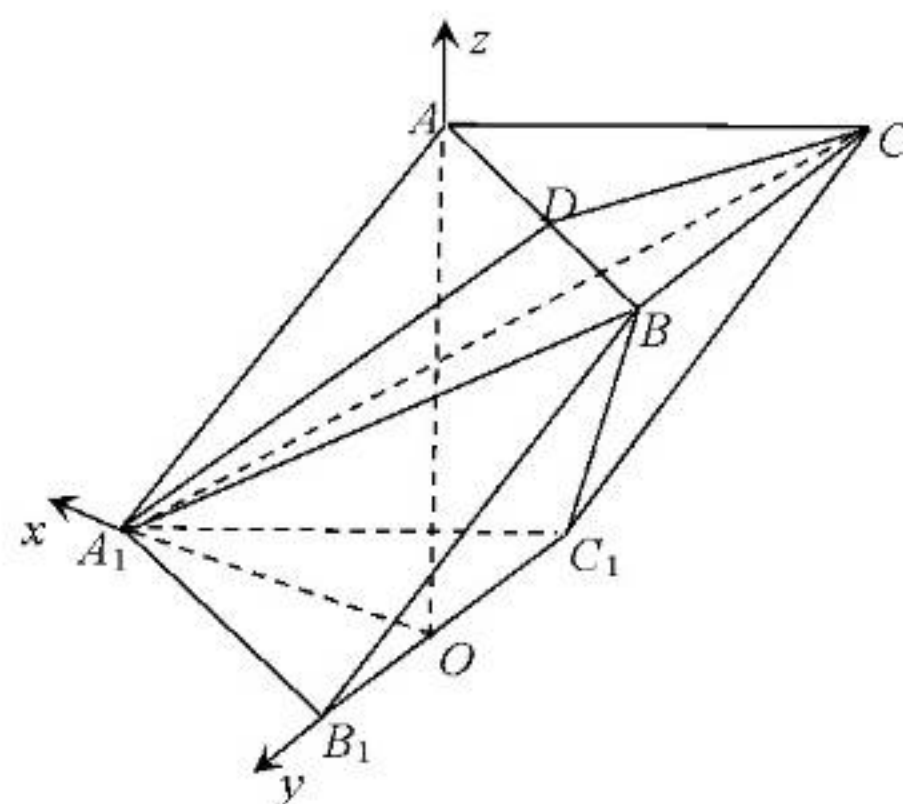
所以 $B(-\sqrt{3}, 1, 3)$, $D\left(\frac{-\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, 3\right)$,

因为 $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{A_1C_1} = (-\sqrt{3}, -1, 0)$,

所以 $C(-\sqrt{3}, -1, 3)$.

$\overrightarrow{A_1B} = (-2\sqrt{3}, 1, 3)$, $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{B_1C_1} = (0, -2, 0)$,

$\overrightarrow{A_1C} = (-2\sqrt{3}, -1, 3)$, $\overrightarrow{A_1D} = \left(\frac{-3\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, 3\right)$.



设平面 BA_1C 的法向量为 $\mathbf{n} = (x, y, z)$, 由 $\begin{cases} \overrightarrow{A_1B} \cdot \mathbf{n} = 0, \\ \overrightarrow{BC} \cdot \mathbf{n} = 0 \end{cases}$ 得 $\begin{cases} -2\sqrt{3}x + y + 3z = 0, \\ y = 0, \end{cases}$

令 $x = \sqrt{3}$, 得 $z = 2$, 所以平面 BA_1C 的一个法向量为 $\mathbf{n} = (\sqrt{3}, 0, 2)$.

设平面 A_1CC_1 的法向量为 $\mathbf{m} = (a, b, c)$, 由 $\begin{cases} \overrightarrow{A_1C_1} \cdot \mathbf{m} = 0, \\ \overrightarrow{A_1C} \cdot \mathbf{m} = 0 \end{cases}$ 得 $\begin{cases} \sqrt{3}a + b = 0, \\ 2\sqrt{3}a + b - 3c = 0, \end{cases}$

令 $a = \sqrt{3}$, 得 $b = -3, c = 1$, 所以平面 A_1CC_1 的一个法向量为 $\mathbf{m} = (\sqrt{3}, -3, 1)$. 10 分

所以 $\cos \langle \mathbf{n}, \mathbf{m} \rangle = \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{m}}{|\mathbf{n}| |\mathbf{m}|} = \frac{5\sqrt{91}}{91}$, 因为所求二面角为钝角, 所以二面角

$B-A_1C-C_1$ 的余弦值为 $-\frac{5\sqrt{91}}{91}$.

19. 【解答】 (I) 利用前 5 组数据得

$$\bar{x} = \frac{1}{5}(2+4+5+6+8) = 5, \bar{y} = \frac{1}{5}(30+40+60+50+70) = 50,$$

$\Theta y = 6.5x + a, \therefore a = 50 - 6.5 \times 5 = 17.5, \therefore$ 回归直线方程为 $y = 6.5x + 17.5$, 当 $x=1$ 时,

$y = 6.5 + 17.5 = 24, \therefore y$ 的预报值为 24.

$$(II) \quad \Theta \bar{x} = 4, \bar{y} = 46.25, \sum_{i=1}^4 x_{2i-1}^2 = 94, \sum_{i=1}^4 x_{2i-1} y_{2i-1} = 945,$$

$$\therefore \hat{b} = \frac{\sum_{i=1}^4 x_{2i-1} y_{2i-1} - 4 \bar{x} \bar{y}}{\sum_{i=1}^4 x_{2i-1}^2 - 4 \bar{x}^2} = \frac{945 - 4 \times 4 \times 46.25}{94 - 4 \times 4^2} \approx 6.83$$

$$\therefore \hat{a} = 46.25 - 6.83 \times 4 = 18.93, \text{ 即}$$

$$\hat{b} = 6.83, \hat{a} = 18.93, b = 6.5, a = 17.5, \frac{.83 - 6.5}{6.5} \approx 5\%, \frac{18.93 - 17.5}{17.5} \approx 8\%, \text{ 均不超过 } 10\%, \therefore \text{使用}$$

位置最接近的已有旧井 6(1,24).

(III) 由题意, 1,3,5,6 这 4 口井是优质井, 2,4 这两口井是非优质井, \therefore 勘察优质井数

X 的可能取值为 2,3,4, $p(x=k) = \frac{c_4^k c_2^{4-k}}{c_6^4}$, 可得

$$p(X=2) = \frac{2}{5}, p(X=3) = \frac{8}{15}, p(x=4) = \frac{1}{15} \therefore X \text{ 的分布列为:}$$

X	2	3	4
p	$\frac{2}{5}$	$\frac{8}{15}$	$\frac{1}{15}$

$$EX = 2 \times \frac{2}{5} + 3 \times \frac{8}{15} + 4 \times \frac{1}{15} = \frac{8}{3}.$$

(20) 解: (I) $2b=2$, 所以 $b=1$, 又 $\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, 解得 $a=2$.

所以椭圆 C 的标准方程 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$.

(II) 设 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $M(x_0, y_0)$, 易知直线 l 的斜率不为 0, 则设 $l: x = my + t$.

因为 l 与圆 O 相切, 则 $\frac{|-t|}{\sqrt{1+m^2}}=1$, 即 $t^2=m^2+1$;

由 $\begin{cases} x^2+4y^2=4 \\ x=my+t \end{cases}$ 消去 x , 得 $(m^2+4)y^2+2mty+t^2-4=0$,

则 $\Delta=4m^2t^2-4(t^2-4)(m^2+4)=16(m^2-t^2+4)=48>0$, $y_1+y_2=-\frac{2mt}{m^2+4}$,

$y_0=-\frac{mt}{m^2+4}$, $x_0=my_0+t=\frac{4t}{m^2+4}$, 即 $M(\frac{4t}{m^2+4}, -\frac{mt}{m^2+4})$,

$$|OM|^2 = (\frac{4t}{m^2+4})^2 + (\frac{mt}{m^2+4})^2 = \frac{t^2(m^2+16)}{(m^2+4)^2} = \frac{(m^2+1)(m^2+16)}{(m^2+4)^2}, \dots \quad 9 \text{ 分}$$

设 $x=m^2+4$, 则 $x \geq 4$,

$$|OM|^2 = \frac{(x-3)(x+12)}{x^2} = -\frac{36}{x^2} + \frac{9}{x} + 1 = -36(\frac{1}{x} - \frac{1}{8})^2 + \frac{25}{16} \leq \frac{25}{16},$$

当 $x=8$ 时等号成立, 所以 $|OM|$ 的最大值等于 $\frac{5}{4}$.

21. 试题解析: (I) $g(0) \neq f(0), f'(x) = 1 - \frac{a}{e^x}, g'(x) = \frac{2x}{x^2+1}$,

由 $g(x)=0$, 得 $f(0)=1-a$, 所以 $1-a=0$, 即 $a=1$

(II) (1) 当 $a < 0$ 时, $f'(x) = 1 - \frac{a}{e^x} > 0, f(x)$ 在 $(-\infty, a]$ 单增,

$f(a) = a + \frac{a}{e^a} < a < 0, g(x) = \ln(x^2+1) > 0 > a$, 故 $a < 0$ 时, $h(x)$ 没有零点.

(2) 当 $a=0$ 时, 显然 $h(x)=0$ 有唯一的零点 $x=0$

(3) 当 $a > 0$ 时, 设 $t(a) = \ln a - a + 1, t(a) = \frac{1-a}{a}$,

令 $t'(a) > 0$ 有 $0 < a < 1$, 故 $t(a)$ 在 $(0, 1)$ 上单调递增, 在 $(1, +\infty)$ 上单调递减,

所以, $t(a) \leq t(1)$, 即 $\ln a \leq a-1, f'(x) = 1 - \frac{a}{e^x} = 0, x = \ln a \leq a-1 < a \therefore f(x)$ 在 $(-\infty, \ln a)$ 上单

调递减, 在 $(\ln a, a]$ 上单调递增, $\therefore f(x)_{\min} = f(\ln a) = \ln a + 1, \ln a + 1 \leq a$ (当且仅当 $a=1$ 等

号成立) $f(a) = a + \frac{a}{e^2} > a \therefore f(x) = a$ 有两个根 (当 $a=1$ 时只有一个根 $x = \ln a = 0$)

$g(x) = \ln(x^2+1)$ 在 $(a, +\infty)$ 单增, 令 $s(a) = g(a) - a = \ln(a^2+1) - a, s'(a) = \frac{2a}{a^2+1} - 1 \leq 0, s(a)$ 为减

函数, 故 $s(a) < s(0) = 0, \therefore \ln(a^2+1) < a, \therefore g(x) = a$ 只有一个根.

$\therefore 0 < a < 1$ 时 $h(x)$ 有 3 个零点; $a=1$ 时 $h(x)$ 有 1 个零点; $0 < a < 1$ 时 $h(x)$ 有 3 个零点;

$a=1$ 时 $h(x)$ 有 2 个零点; $a>1$ 时, $h(x)$ 有 3 个零点.

22. 解: (I) 因为直线 l 过点 $P(2, 6)$, 且倾斜角为 $\frac{3}{4}\pi$,

$$\text{所以直线 } l \text{ 的参数方程为 } \begin{cases} x=2-\frac{\sqrt{2}}{2}t, \\ y=6+\frac{\sqrt{2}}{2}t \end{cases} (t \text{ 为参数}),$$

$$\text{由 } \rho=20\sin(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2})\cos(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}), \text{ 得 } \rho=10\cos\theta,$$

所以曲线 C 的直角坐标方程为 $x^2+y^2-10x=0$.

$$(II) \text{ 将直线 } l \text{ 的参数方程代入圆 } C \text{ 的直角坐标方程, 得 } (-3-\frac{\sqrt{2}}{2}t)^2+(6+\frac{\sqrt{2}}{2}t)^2=25,$$

$$t^2+9\sqrt{2}t+20=0, \quad \Delta=82>0,$$

$$\text{可设 } t_1, t_2 \text{ 为上述方程的两个实根, 则有 } \begin{cases} t_1+t_2=-9\sqrt{2}, \\ t_1t_2=20, \end{cases}$$

$$\text{又直线 } l \text{ 过点 } P(2, 5), \text{ 所以 } |PA|+|PB|=|t_1|+|t_2|=|t_1+t_2|=9\sqrt{2}.$$